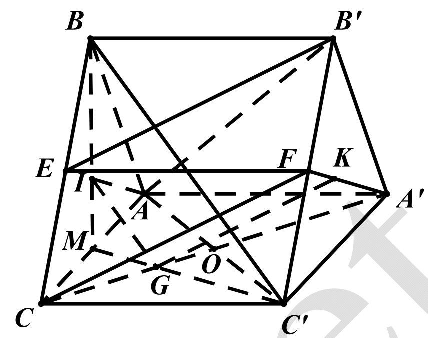
Câu 12. a) Gọi O, M, E, F lần lượt là trung điểm của $AC', AC, BC, B'C'$.

Chứng minh $(IGK) \parallel (BCC'B')$.

Ta có $\dfrac{MI}{MB} = \dfrac{MG}{MC'} \Rightarrow IG \parallel CC' \subset (BCC'B')$

$\Rightarrow IG \parallel (BCC'B')$ (1)



Tương tự $\dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{OA' + \frac{1}{3}OA'}{A'C}$

$= \dfrac{\frac{4}{3}OA'}{A'C} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có $\dfrac{A'K}{A'F} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{A'G}{A'C} = \dfrac{A'K}{A'F}$

$\Rightarrow GK \parallel CF \subset (BCC'B')$

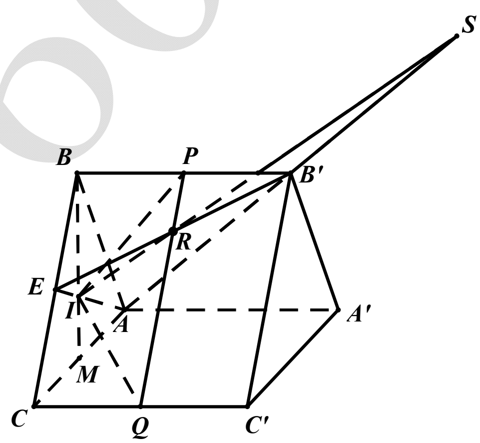
$\Rightarrow GK \parallel (BCC'B')$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $(IGK) \parallel (BCC'B')$.

Chứng minh $(A'KG) \parallel (AIB')$.

Dễ thấy $AA'FE$ là hình bình hành nên $A'F \parallel AE$ hay $A'F \parallel (AIB')$ (3). Cũng dễ thấy $CF \parallel EB' \subset (AIB') \Rightarrow CF \parallel (AIB')$ (4)

Từ $(3),(4)$ suy ra $(A'CF)//(AIB')$ mà $(A'CF)$ chính là $(A'KG)$ nên $(A'KG) \parallel (AIB')$.



b) Trong $(BCC'B')$ gọi $R = PQ \cap B'E$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in PQ \\ R \in B'E \subset (AB'E) \end{cases}$

Trong $(AB'E)$ gọi $S = IR \cap AB'$ thì đường thẳng IR chính là đường thẳng cần dựng.

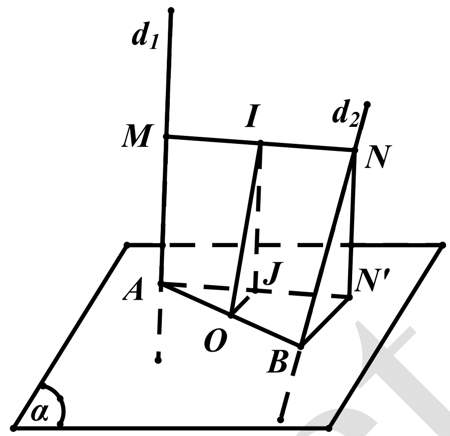
Câu 13. a) Ta có $MA \parallel NN'$ (1)

Do $\begin{cases} MN \parallel (\alpha) \\ (AMNN') \cap (\alpha) = AN' \end{cases}$

$\Rightarrow AN' \parallel MN$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $AMNN'$ là hình bình hành.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với d_1 thì $NN' \subset (\beta) \Rightarrow N' \in (\beta)$ từ đó ta có N' thuộc giao tuyến d_3 của (α) và (β).



b) Ta có $MN = AN'$ nên MN nhỏ nhất khi AN' nhỏ nhất $\Leftrightarrow AN' \perp d_3$.

Từ đó ta xác định Δ như sau:

- Dựng (β) chứa d_2 và $(\beta) \parallel d_1$.
- Dựng giao tuyến $d_3 = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Gọi N' là hình chiếu của A trên d_3.
- Từ N' dựng đường thẳng song song với d_1 cắt d_2 tại N.
- Từ N dựng đường thẳng Δ song song với $N'A$ thì Δ là đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán.

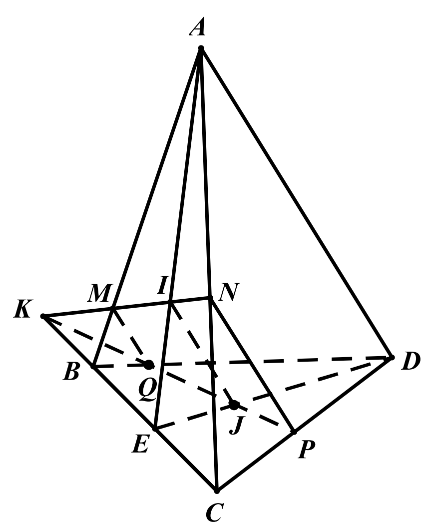
c) Gọi J là trung điểm của AN' thì $(OIJ) \parallel (\beta)$ mà O cố định và (β) cố định nên (OIJ) cố định. Vậy OI thuộc mặt phẳng cố định đi qua O và song song với (β).

Câu 14.a) Ta có $(ABC),(DBC),(\alpha)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là BC, MN, PQ nên theo định lí về giao tuyến thì BC, MN, PQ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Ta chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân trong trường hợp BC, MN, PQ đồng quy

Gọi E là trung điểm của BC thì $\dfrac{EI}{EA} = \dfrac{EJ}{ED} \Rightarrow IJ \parallel AD$.

Từ đó ta có $\begin{cases} IJ \subset (\alpha) \\ AD \subset (ACD) \\ IJ \parallel AD \\ (\alpha) \cap (ACD) = NP \end{cases} \Rightarrow NP \parallel IJ$.



Tương tự $MQ \parallel IJ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Dễ thấy $DQ = AM = x, DP = AN = y$. Theo định lí cô sin ta có

$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AN\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy$

.

Tương tự

$PQ^2 = DP^2 + DQ^2 - 2DP.DQ\cos 60^0 = x^2 + y^2 - xy$

$\Rightarrow MN = PQ$

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Trường hợp BC, MN, PQ song song không có gì khó khăn bạn đọc tự kiểm tra.

c) Ta có $S_{AMN} = S_{AIM} + S_{AIN} \Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\sin 60^0 = \frac{1}{2}x.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0 + \frac{1}{2}y.\frac{a\sqrt{3}}{3}\sin 30^0$

$\Leftrightarrow a(x+y) = 3xy$.

b) Ta có $AM + AN = x + y$. Theo BĐT Cauchy ta có

$a(x+y) = 3xy \le 3\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 3(x+y)^2 - 4a(x+y) \Leftrightarrow x + y \ge \frac{4a}{3}$

$\Rightarrow AM + AN \ge \frac{4a}{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \frac{2a}{3}$, khi đó (α) đi qua IJ và song song với BC.

Không giảm tổng quát ta có thể giả sử $x \ge y$ khi đó $x \in [\frac{2a}{3}; a]$

Và $x + y = x + \frac{ax}{3x-a} = \frac{3x^2}{3x-a}$

$\Rightarrow x + y - \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{3x-a} - \frac{3a}{2} = \frac{(a-x)(2a-x)}{3x-a} \le 0 \Rightarrow x + y \le \frac{3a}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a \Rightarrow y = \frac{a}{2}$. Khi đó (α) đi qua B.

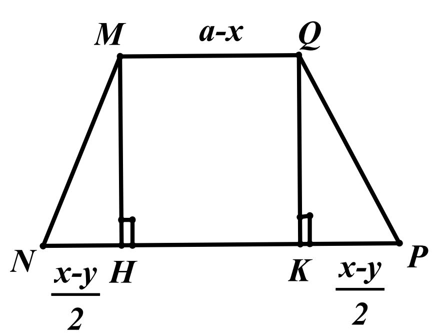
Vậy $\min(AM+AN) = \frac{4a}{3}, \max(AM+AN) = \frac{3a}{2}$.

c) Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang cân có

$MQ = a - x, NP = a - y$,

giả sử $x \ge y \Rightarrow a - x \le a - y$.

Ta có $HN = \frac{(a-y)-(a-x)}{2} = \frac{x-y}{2}$



$MH^2 = MN^2 - NH^2$

$= x^2 + y^2 - xy - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$.

$= \frac{3(x^2+y^2) - 6xy}{4} = \frac{3s^2 - 8as}{4}$

$MH = \sqrt{3xy} = \sqrt{a(x+y)} = \frac{\sqrt{3s^2 - 8as}}{2}$

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MQ + NP)MH = \frac{1}{2}(2a - (x+y))\sqrt{3s^2 - 8as}$

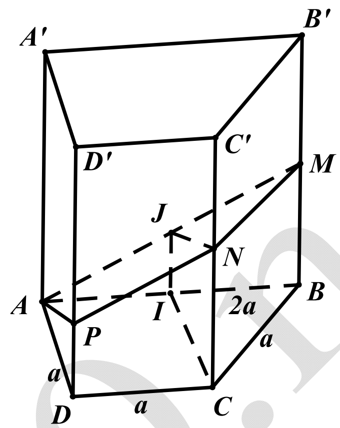
$= \frac{1}{4}(2a - s)\sqrt{3s^2 - 8as}$.

Câu 15.a) Ta có $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$, $(\alpha) \cap (ABB'A') = AM$

$(\alpha) \cap (CDD'C') = NP \Rightarrow AM \parallel NP \ (1)$

do đó

$AMNP$ là hình thang.

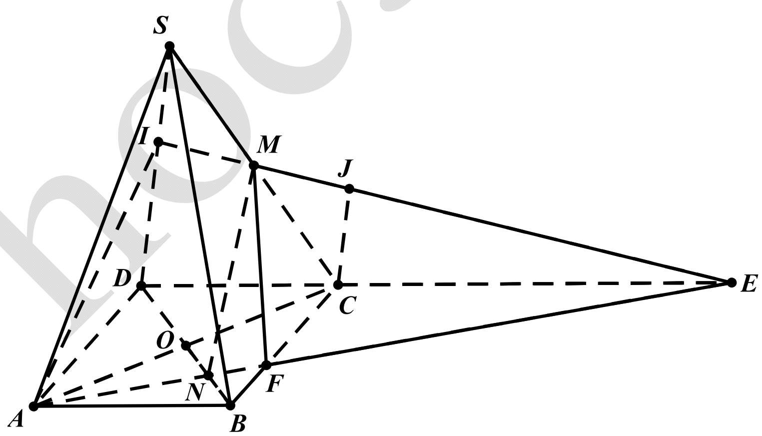


b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, AM thì $IC \parallel AD \Rightarrow IC \parallel (ADD'A')$

lại có $IJ \parallel BB' \parallel AA'$

$\Rightarrow IJ \parallel AA' \subset (ADD'A') \Rightarrow (CIJN) \parallel (ADD'A')$ Mặt khác $(\alpha) \cap (ADD'A') = AP$ và $(\alpha) \cap (CIJN) = JN$ nên $JN \parallel AP \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $APNJ$ là hình bình hành , do đó $PN = AJ = \frac{1}{2}AM$.



PHẦN 3 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

I. Dạng 1:Chứng minh 2 mặtphẳng song song

a) Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý, hệ quả sau:

1. $\begin{cases}(\alpha)\supset a,\ b\\ a\cap b=I\\ a//(\beta),\ b//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$ **2.** $\begin{cases}(\alpha)//(\gamma)\\ (\beta)//(\gamma)\\ (\alpha)\neq(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$, gọi $M,\ N,\ P$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $SA,\ SB,\ SC$. Gọi $A'=BP\cap CN, B'=CM\cap AP, C'=AN\cap BM$. Hãy chọn khẳng định sai:

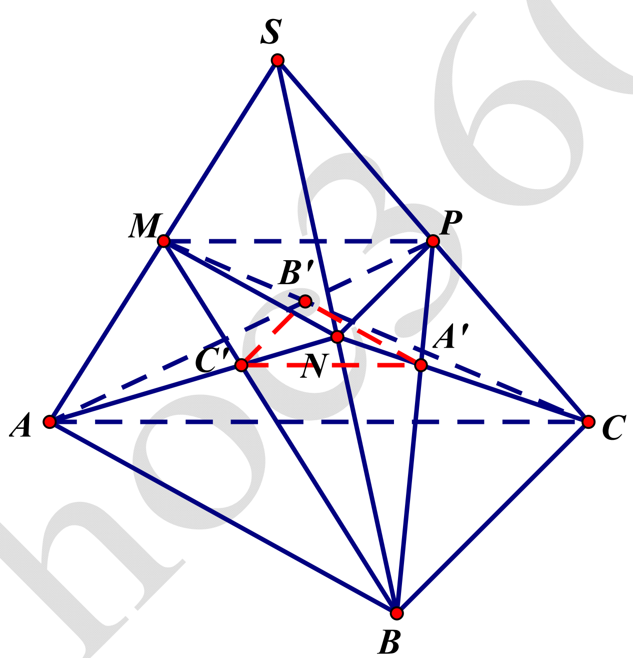
A. $(MNP)//(ABC)$ **B.** $(A'B'C')//(ABC)$

C. $(A'B'C')//(MNP)$ **D.** (ABC) cắt (MNP)

Lờigiải

Chọn D

Giảitheotự luận:



Ápdụngđịnhlý Taletđảotrongcácmặtphẳng $(SAB),\ (SBC)$, ta cócáckếtquả

$MN//AB,\ NP//BC\Rightarrow(MNP)//(ABC)$.

Ápdụngđịnhlý Taletđảotrongcácmặtphẳng $(BMP),\ (CMN)$, ta cócáckếtquả

$MP//A'C',\ MN//A'B'\Rightarrow(MNP)//(A'B'C')$.

Theo tínhchấtbắccầusuyra $(A'B'C')//(ABC)$.Nhưvậyđápán D sai

Giảitheo pp trắcnghiệm:

Nếutưởngtượngtốtcóthểđoánđượckếtquảngay.

Ví dụ 2: Cho hìnhlăngtrụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $M = BC' \cap B'C,\ N = AC' \cap A'C,\ P = AB' \cap A'B$.

Hãychọnkhẳngđịnhsai:

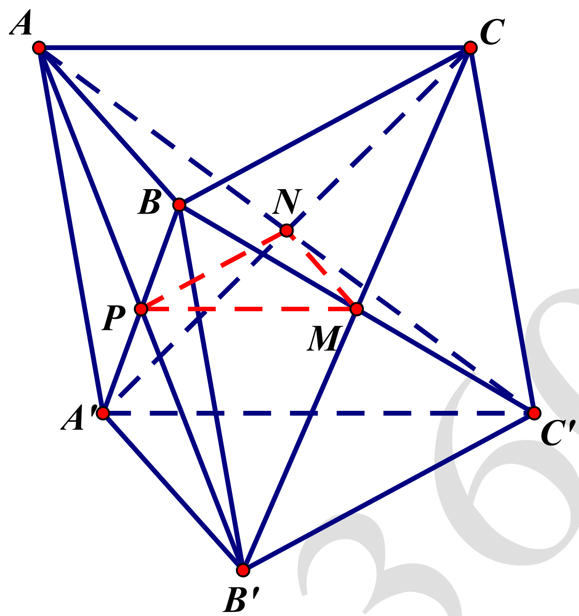
A. $(A'B'C')//(ABC)$ **B.** $(MNP)//(ABC)$

C. $(A'B'C')//(MNP)$ **D.** ΔMNP và ΔABC khôngđồngdạng

Lờigiải

Chọn D

Giảitheotự luận



Do giảthiếthìnhlăngtrụ, nên ta cóngay $(A'B'C')//(ABC)$.

ÁpdụngđịnhlýTaletđảotrongcácmặtphẳng $(B'AC)$, $(C'AB)$, ta có

$MP//AC, MN//AB \Rightarrow (MNP)//(ABC)$.

Theo tínhchấtbắccầu, ta có $(A'B'C')//(MNP)$

TrongkhiápdụngđịnhlýTaletđảo, ta cócáctỷlệ $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP$

II. Dạng 2:Chứng minh đườngthẳng song songvớimặtphẳng

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàocáchệquảsau:

1. $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a//(\beta)$ **2.** $\begin{cases} AB//(\alpha) \\ AC//(\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC//(\alpha)$

vàcácđịnhlý, hệquảcủabàitrước

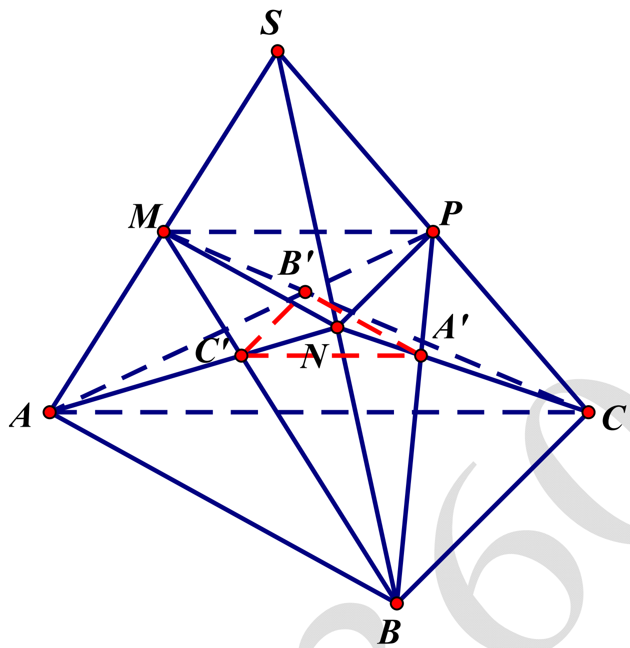
Ví dụ 1: Cho hìnhchóp $S.ABC$, gọi $M,\ N,\ P$ lầnlượtlàtrungđiểmcủacáccạnh $SA,\ SB,\ SC$. Gọi $A'=BP\cap CN, B'=CM\cap AP, C'=AN\cap BM$. Cóbaonhiêucặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song songvớinhautrongsốcácđườngthẳngvàmặtphẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 18 **B.** 3 **C.** 9 **D.** 12

Lờigiải

Chọn A

Giảitheotự luận:



Có 3 mặtphẳngđôimột song song: (ABC), $(A'B'C')$, (MNP). Mỗicặpmặtphẳngnàysẽtạora 6 cặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song song. Tấtcảcó 3 cặpmặtphẳngnhưvậy, nêncó 18 cặp (đườngthẳng, mặtphẳng) song song

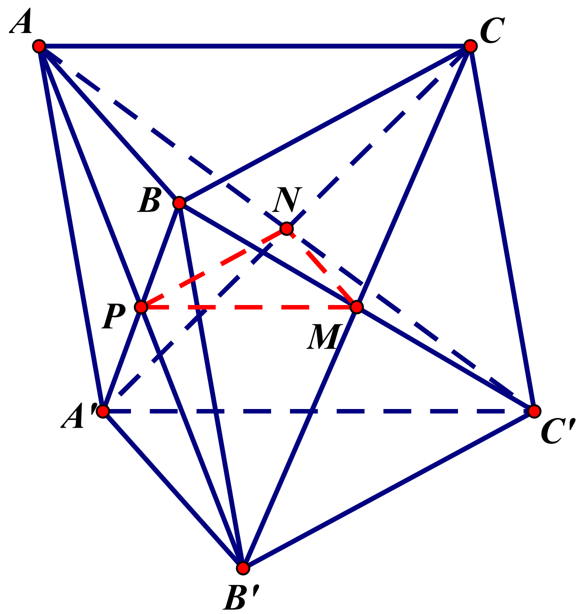
Ví dụ 2: Cho hìnhlăngtrụ $ABC.A'B'C'$. Gọi $M=BC'\cap B'C,\ N=AC'\cap A'C,\ P=AB'\cap A'B$. Đườngthẳng BC song songvớibaonhiêumặtphẳngtrongsốcácmặtphẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Lờigiải

Chọn B

Giảitheotự luận



Ta có $BC//(A'B'C'),\ (MNP),\ (AB'C')$

III. Dạng 3: Chứng minh 2 đườngthẳng song song

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàođịnhlý ở bàihaimặtphẳng song song

$$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\gamma)//(\alpha)=a\Rightarrow a//b\\(\gamma)//(\beta)=b\end{cases}$$

vàcácđịnhlý, hệquả ở cácbàitrước

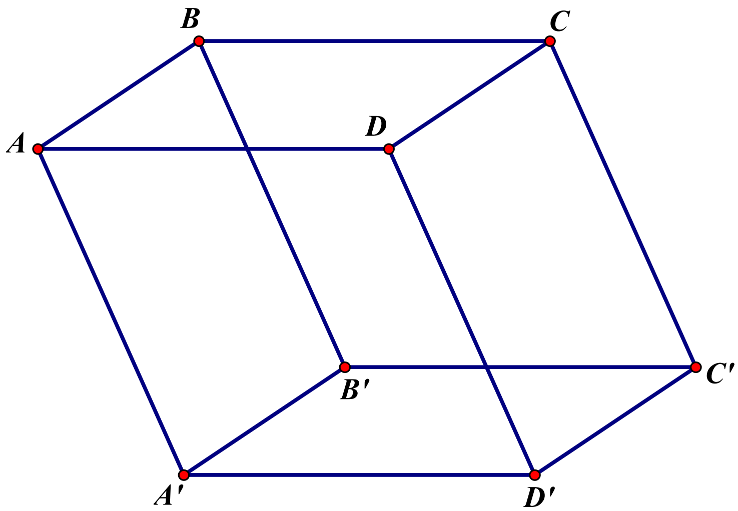
Ví dụ 1: Cho hìnhhộp $ABCD.A'B'C'D'$. Cóbaonhiêucặpđườngthẳng song songvớinhautrongsốcácđườngthẳngđi qua cácđiểmđãcho?

A. 12 **B.** 15 **C.** 24 **D.** 18

Lờigiải

Chọn C

Giảitheotự luận:



Ta có

$AD\,//\,BC\,//\,A'D'//\,B'C' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AB\,//\,CD\,//\,A'B'//\,C'D' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AA'//\,BB'//\,CC'//\,DD' \Rightarrow$ Có $C_4^2 = 6$ cặp

$AC\,//\,B'C', BD\,//\,A'C', AB'//\,DC', BA'//\,CD', AD'//\,BC', DA'//\,CB'$, có 6 cặp

IV. Dạng 4: Bàitoánliênquanđếntỷlệđộdài

a) Phươngphápgiảitự luận.

DựavàođịnhlýTalet (thuận), hệquả ở bàihaimặtphẳng song song:

1. $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ d\cap(\alpha)=A,\ d\cap(\beta)=B \\ d'\cap(\alpha)=A',\ d'\cap(\beta)=B' \\ d//d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

2. $\begin{cases} (\alpha)//(\beta)//(\gamma) \\ d\cap(\alpha)=A,\ d\cap(\beta)=B,\ d\cap(\gamma)=C \\ d'\cap(\alpha)=A',\ d'\cap(\beta)=B',\ d'\cap(\gamma)=C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

vàđịnhlýTaletthuậnvàđảotrongmặtphẳng

Ví dụ 1: Cho hìnhchópcụt $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $M = BC'\cap B'C,\ Q = AD'\cap A'D$. Mặtphẳng (SQM) cắt $BC,\ B'C',\ AD,\ A'D'$ lầnlượttại $E,\ H,\ E,\ K$. Chọnmệnhđềsai

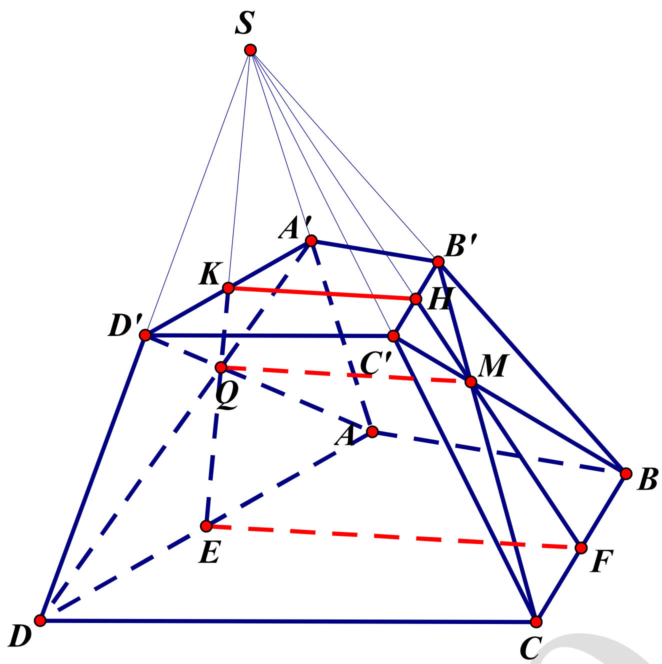
A. $\dfrac{HK}{FE} = \dfrac{\text{dieän tích töù giaùc } A'B'C'D'}{\text{dieän tích töù giaùc } ABCD}$ **B.** 4 ñieåm A', B', C, D taïo thaønh töù giaùc

C. E laø trung ñieåm cuûa caïnh AD **D.** $\dfrac{HK}{FE} = \dfrac{MB'}{MC} = \dfrac{QA'}{QD}$

Lờigiải

Chọn A

Giảitheotự luận:



5. Dạng 5:Xácđịnhgiaotuyến

a) Phươngphápgiảitự luận.

Dựavàođịnhlý:

$$\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ (\gamma)//(\alpha)=a \Rightarrow a//b \\ (\gamma)//(\beta)=b \end{cases}$$

Vàcáckếtquảcótrước

Ví dụ 1: Cho hìnhchóptứgiác $S.ABCD$, cóđáylàhìnhbìnhhành, gọi O làtâmcủađáy.Gọi (α) làmặtphẳngđi qua O và song songvới (SAD). (α) cắt $AB,\ SC$ lầnlượttại $M,\ Q$ .Hãychọnmệnhđềđúng:

A. $OQ,\ SA$ cắtnhau

B. $MQ//(SAD)$

C. $OQ,\ (SAD)$ cắtnhau

D. $SO//MQ$

Lờigiải

Chọn B

Giảitheotự luận: