

C. $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{7}{8}$.

D. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 12$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} \Rightarrow \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{7}{8}}{\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = 14$

Như vậy, $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 12$ là kết quả sai.

Câu 36. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

A. $A = -1$.

B. $A = 1$.

C. $A = 4$.

D. $A = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + 3 \sin^2 x \cos^2 x$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1$.

Câu 37. Biểu thức $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x}$ không phụ thuộc vào x và bằng

A. 1.

B. -1.

C. $\frac{1}{4}$.

D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \sin^2 x \cos^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{1}{4 \tan^2 x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2$

$= \frac{(1 - \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} - \frac{(1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{(1 - \tan^2 x)^2 - (1 + \tan^2 x)^2}{4 \tan^2 x} = \frac{-4 \tan^2 x}{4 \tan^2 x} = -1$.

Câu 38. Biểu thức $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$ không phụ thuộc vào x, y và bằng

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \frac{\cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y}$

$= \frac{\cos^2 x (1 - \cos^2 y) - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\cos^2 x \sin^2 y - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} = \frac{\sin^2 y (\cos^2 x - 1)}{(1 - \cos^2 x) \sin^2 y} = -1$.

Câu 39. Biểu thức $C = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$ có giá trị không đổi và bằng

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } C &= 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x) \\ &= 2\left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \sin^2 x \cos^2 x\right]^2 - \left[(\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x\right] \\ &= 2\left[1 - \sin^2 x \cos^2 x\right]^2 - \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right]^2 + 2\sin^4 x \cos^4 x \\ &= 2\left[1 - \sin^2 x \cos^2 x\right]^2 - \left[1 - 2\sin^2 x \cos^2 x\right]^2 + 2\sin^4 x \cos^4 x \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x \cos^4 x) - (1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 4\sin^4 x \cos^4 x) + 2\sin^4 x \cos^4 x \\ &= 1 \end{aligned}$$

Câu 40. Hệ thức nào **sai** trong bốn hệ thức sau:

A. $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \cdot \tan y$.

B. $\left(\sqrt{\frac{1+\sin a}{1-\sin a}} - \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}\right)^2 = 4 \tan^2 a$.

C. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha}$.

D. $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha + 1}$.

Lời giải

Chọn D

A đúng vì $VT = \frac{\tan x + \tan y}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y}} = \tan x \cdot \tan y = VP$

B đúng vì

$$VT = \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} + \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} - 2 = \frac{(1 + \sin a)^2 + (1 - \sin a)^2}{1 - \sin^2 a} - 2 = \frac{2 + 2\sin^2 a}{\cos^2 a} - 2 = 4 \tan^2 a = VP$$

C đúng vì $VT = \frac{-\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1 + \cot^2 \alpha}{1 - \cot^2 \alpha} = VP$.

Câu 41. Nếu biết $3\sin^4 x + 2\cos^4 x = \frac{98}{81}$ thì giá trị biểu thức $A = 2\sin^4 x + 3\cos^4 x$ bằng

A. $\frac{101}{81}$ hay $\frac{601}{504}$.

B. $\frac{103}{81}$ hay $\frac{603}{405}$.

C. $\frac{105}{81}$ hay $\frac{605}{504}$.

D. $\frac{107}{81}$ hay $\frac{607}{405}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{98}{81} - A \Leftrightarrow \cos 2x = A - \frac{98}{81}$

$$5(\sin^4 x + \cos^4 x) = \frac{98}{81} + A \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{1}{5}\left(\frac{98}{81} + A\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 2x = \frac{1}{5}\left(\frac{98}{81} + A\right)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(A - \frac{98}{81}\right)^2 = \frac{2}{5}\left(A + \frac{98}{81}\right) = \frac{2}{5}\left(A - \frac{98}{81}\right) + \frac{392}{405}$$

$$\text{Đặt } A - \frac{98}{81} = t \Rightarrow t^2 - \frac{2}{5}t + \frac{13}{405} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{13}{45} \\ t = \frac{1}{9} \end{cases}$$

+) $t = \frac{13}{45} \Rightarrow A = \frac{607}{405}$

+) $t = \frac{1}{9} \Rightarrow A = \frac{107}{81}$.

Câu 42. Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $3\sin x + 2\cos x$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{7}}{4}$ hay $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$.

B. $\frac{5-\sqrt{5}}{7}$ hay $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ hay $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$.

D. $\frac{3-\sqrt{2}}{5}$ hay $\frac{3+\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Khi đó } \sin x, \cos x \text{ là nghiệm của phương trình } X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \end{cases}$$

Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(\sin x + \cos x) = 1$

+) Với $\sin x = \frac{1+\sqrt{7}}{4} \Rightarrow 3\sin x + 2\cos x = \frac{5+\sqrt{7}}{4}$

+) Với $\sin x = \frac{1-\sqrt{7}}{4} \Rightarrow 3\sin x + 2\cos x = \frac{5-\sqrt{7}}{4}$.

Câu 43. Biết $\tan x = \frac{2b}{a-c}$. Giá trị của biểu thức $A = a\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x$ bằng

A. $-a$.

B. a .

C. $-b$.

D. b .

Lời giải

Chọn B

$$A = a\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x \Leftrightarrow \frac{A}{\cos^2 x} = a + 2b\tan x + c\tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 x) = a + 2b\tan x + c\tan^2 x \Leftrightarrow A\left(1 + \left(\frac{2b}{a-c}\right)^2\right) = a + 2b\frac{2b}{a-c} + c\left(\frac{2b}{a-c}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow A\frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2(a-c) + c4b^2}{(a-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow A\frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2a}{(a-c)^2} = \frac{a \cdot ((a-c)^2 + 4b^2)}{(a-c)^2} \Leftrightarrow A = a$$

Câu 44. Nếu biết $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$ thì biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$ bằng

A. $\frac{1}{(a+b)^2}$.

B. $\frac{1}{a^2+b^2}$.

C. $\frac{1}{(a+b)^3}$.

D. $\frac{1}{a^3+b^3}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Vậy: } \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

Câu 45. Với mọi α , biểu thức : $A = \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng :

A. -10.

B. 10.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$A = \cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$$

$$A = \left[\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) \right] + \dots + \left[\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right) \right]$$

$$A = 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{9\pi}{10} + 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{7\pi}{10} + \dots + 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cos \frac{\pi}{10}$$

$$A = 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \left(\cos \frac{9\pi}{10} + \cos \frac{7\pi}{10} + \cos \frac{5\pi}{10} + \cos \frac{3\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{10} \right)$$

$$A = 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \left(2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \Leftrightarrow A = 2 \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{10}\right) \cdot 0 = 0.$$

Câu 46. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$ bằng

A. 2.

B. -2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$A = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{1 - \cos \frac{7\pi}{4}}{2} = 2 - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= 2 - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = 2.$$

Câu 47. Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$ bằng :

A. 1.

B. 2.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$A = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2 \sin 2550^\circ \cdot \cos(-188^\circ)}{2 \cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan(8^\circ + 360^\circ)} + \frac{2 \sin(30^\circ + 7.360^\circ) \cdot \cos(8^\circ + 180^\circ)}{2 \cos(-82^\circ + 2.360^\circ) + \cos(90^\circ + 8^\circ)} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan 8^\circ} + \frac{-2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \cos 82^\circ - \sin 8^\circ}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \cos(90^\circ - 8^\circ) - \sin 8^\circ} \Leftrightarrow A = \frac{1}{\tan 8^\circ} - \frac{2 \sin 30^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \sin 8^\circ - \sin 8^\circ}$$

$$\Leftrightarrow A = \cot 8^\circ - \frac{1 \cdot \cos 8^\circ}{\sin 8^\circ} = \cot 8^\circ - \cot 8^\circ = 0.$$

Câu 48. Cho tam giác ABC và các mệnh đề :

(I) $\cos \frac{B+C}{2} = \sin \frac{A}{2}$ (II) $\tan \frac{A+B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = 1$ (III) $\cos(A+B-C) - \cos 2C = 0$

Mệnh đề đúng là :

A. Chỉ (I). B. (II) và (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (III).

Lời giải

Chọn C

+) Ta có: $A+B+C = \pi \Leftrightarrow B+C = \pi - A \Leftrightarrow \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$

(I) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$ nên (I) đúng

+) Tương tự ta có: $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$\tan \frac{A+B}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \tan \frac{A+B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = 1$

nên (II) đúng.

+) Ta có

$A+B-C = \pi - 2C \rightarrow \cos(A+B-C) = \cos(\pi - 2C) = -\cos(2C)$

$\Leftrightarrow \cos(A+B-C) + \cos(2C) = 0$

nên (III) sai.

Câu 49. Cho $\cot \alpha = -3\sqrt{2}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khi đó giá trị $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2}$ bằng :

A. $2\sqrt{19}$. B. $-2\sqrt{19}$. C. $-\sqrt{19}$. D. $\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn A

$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + 18 = 19 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{19} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{19}}$

Vì

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{19}}$

Suy ra $\tan \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\sin \alpha} = 2\sqrt{19}$.

Câu 50. Biểu thức rút gọn của $A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a}$ bằng :

A. $\tan^6 a$.

B. $\cos^6 a$.

C. $\tan^4 a$.

D. $\sin^6 a$.

Lời giải

Chọn A

$$A = \frac{\tan^2 a - \sin^2 a}{\cot^2 a - \cos^2 a} \Leftrightarrow A = \frac{\sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right)}{\cos^2 a \left(\frac{1}{\sin^2 a} - 1 \right)} = \frac{\tan^2 a \cdot \tan^2 a}{\cot^2 a} = \tan^6 a.$$