$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK \qquad (2)$$

Có $\begin{cases} AK \perp SD(gt) \\ AK \perp CD(\text{do } (2)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC \quad (**)$.

Từ (*) và (**) suy ra $SC \perp (AHK)$.

b). Trong mp(SBD), gọi $L = DJ \cap SB$, $M = BJ \cap SD$.

Dễ dàng chứng minh $AD \perp mp(SAB) \Rightarrow AD \perp SB \qquad (3)$.

$$\begin{cases} SB \perp AD(\text{do } (3)) \\ SB \perp AJ(\text{do } AJ \perp (SBD)) \\ AD, AJ \subset (ADL) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ADL) \Rightarrow SB \perp DL \qquad (I).$$

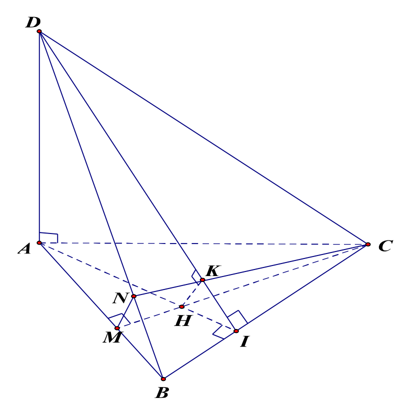
Chứng minh tương tự thì $SD \perp BM \qquad (II)$

Từ $(I),(II)$ xét trong tam giác SBD có J là giao điểm của hai đường cao. Suy ra J là trực tâm của ΔSBD.

Câu 17: Cho tứ diện ABCD có DA $\perp$ (ABC). Gọi AI là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Hạ HK vuông góc với DI tại K . Chứng minh:

a). HK $\perp$ BC. b). K là trực tâm của tam giác DBC.

LỜI GIẢI



Trong tam giác ABC gọi $M = CH \cap AB$. Trong tam giác BCD gọi $N = CK \cap BD$.

a). Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DA \\ AI, DA \subset (DAI), DA \cap AI = A \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (DAI) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp DI \end{cases} (*)$$

b). K là trực tâm của tam giác DBC.

Có $\begin{cases} HK \perp DI(gt) \\ HK \perp BC(\text{do a)}) \\ DI, BC \subset mp(BCD); DI \cap BC = I \end{cases} \Rightarrow HK \perp (BCD)$.

Có $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp DA \\ AB, DA \subset (ABD); AB \cap DA = A \end{cases} \Rightarrow CM \perp mp(DAB) \Rightarrow CM \perp BD \ (1)$

Có $\begin{cases} BD \perp CM(do(1)) \\ BD \perp HK(do\ HK \perp (BCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(CMN) \Rightarrow BD \perp CN \ (**)$

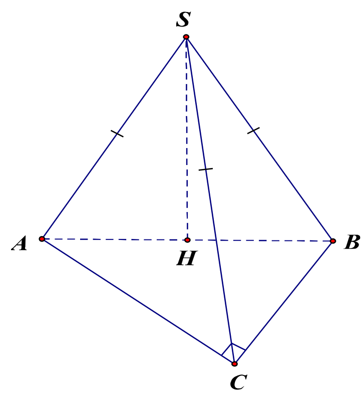
Từ $(*), (**) \Rightarrow$ K là trực tâm của tam giác BCD.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = $a, \widehat{ASB} = 120^0$, $\widehat{BSC} = 90^0$, $\widehat{CSA} = 60^0$.

a). Chứng minh tam giác ABC vuông.

b). Xác định hình chiếu H của S trên mp(ABC). Tính SH theo a.

LỜI GIẢI



a). $AB^2 = AS^2 + SB^2 - 2AS.BS.\cos ASB = 3a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{3}$

$BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

$AC^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos ASB = a^2 \Rightarrow AC = a$

Ta có $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Vậy ABC là tam giác vuông tại C.

b). Vì $\begin{cases} SH \perp mp(ABC) \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow HA = HB = HC$.

Vậy H là trung điểm của AB.

Vì tam giác ASH là nữa tam giác đều nên $SH = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác , có ABD là tam giác đều , BCD là tam giác cân tại C có $\widehat{BCD} = 120^0$. $SA \perp mp(ABCD)$.

a). Gọi H , K là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Chứng minh SC ⊥ (AHK).

b). Gọi C' là giao điểm của SC với mp(AHK). Tính diện tích tứ giác AHC'K khi AB = SA = a.

LỜI GIẢI

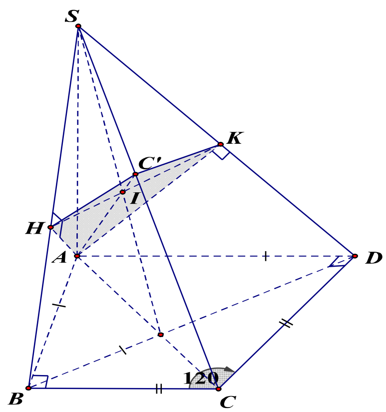
a). Vì $\begin{cases} AB = AD \\ CB = CD \end{cases}$ suy ra AC là đường trung trực của đoạn BD.

Tam giác ABD đều , $ABD = ADB = 60^0$.

Tam giác BCD cân tại C có $BCD = 120^0 \Rightarrow CBD = CDB = 30^0$.

Vậy $ABC = ADC = 90^0$.

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABCD)\right) \\ AB, SA \subset (SAB),\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$



$$\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA\left(\text{do } SA \perp (ABCD)\right) \\ AD, SA \subset (SAD),\ AB \cap SA = A \end{cases}$$

$\Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow DC \perp AK$.

Có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1).

Có $\begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{cases} \Rightarrow AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SC \perp mp(AHK)$

b). $BD \perp AC,\ BD \perp SA \Rightarrow BD \perp mp(SAC)$.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD(c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} ASB = ASD \\ SB = SD \end{cases}$

Xét hai tam giác vuông SAH và SAK, có : SA cạnh chung, $ASB = ASD$ $\Rightarrow \Delta SAH = \Delta SAK$ nên $SH = SK$, mà $SB = SD$. Suy ra $HK \parallel BD$ (định lý đảo Talet).

Có $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ BD \parallel HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp mp(SAC)$. Vậy $HK \perp AC'$ (Vì $AC' \subset mp(SAC)$) (*).

Ta có $AB = SA \Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại A nên H trung điểm của SB.

Xét ΔSBD có HK là đường trung bình nên $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a}{2}$.

Xét ΔABC vuông tại B : $AC = \frac{AB}{\sin 60^0} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vì $SC \perp (AHK) \Rightarrow SC \perp AC'$ $\quad (\text{vì } AC' \subset mp(AHK))$.

Xét ΔSAC vuông tại A : $\frac{1}{AC'^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4a^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow AC' = \frac{2a}{\sqrt{7}}$

Từ (*) thì tứ giác AHC'K có 2 đường chéo vuông góc nên $S_{AHC'K} = \frac{1}{2}HK.AC' = \frac{1}{2}\frac{a}{2}.\frac{2a}{\sqrt{7}} = \frac{a^2}{2\sqrt{7}}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh tâm O, AB = SA = a , SA vuông góc với đáy (ABCD). Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H, I, K .

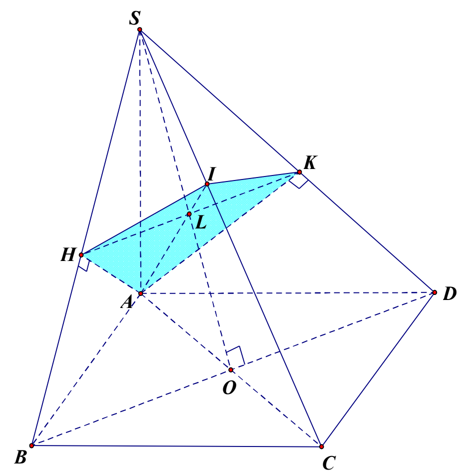
a). Chứng minh $HK \parallel BD$.

b). Chứng minh AH $\perp$ SB , AK $\perp$ SD.

c). Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích AHIK theo a.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh $HK \parallel BD$.



Ta có $(SAC) \cap (ABD) = SO$; $(P) \cap (SAC) = AI$.

Gọi $L = AI \cap SO$.

Vì $\begin{cases} BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \\ mp(P) \perp SC \end{cases} \Rightarrow BD \parallel mp(P)$.

Có $\begin{cases} L \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBD) = HK$, với HK đi qua L và $HK \parallel BD$.

b). Chứng minh AH $\perp$ SB , AK $\perp$ SD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Theo chứng minh trên có :

$$\begin{cases} AH \perp BC (BC \perp (SAB)) \\ AH \perp SC (SC \perp (P)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SB.$$

Tương tự ta chứng minh được $AK \perp mp(SCD) \Rightarrow AK \perp SD$

c). Chứng minh tứ giác AHIK có hai đường chéo vuông góc

Do $BD \perp (SAC)$ và $BD \parallel HK$ suy ra $HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI\left(AI \subset (SAC)\right)$.

Tính diện tích AHIK theo a.

Trong ΔSAC có AI là đường cao :

$$AI.SC = SA.AC \Rightarrow AI = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vì ΔSAB vuông cân tại A nên H là trung điểm BC, suy ra $HK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kết luận $S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật có AB = a , BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B , SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a). Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

b). Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC , K và L là giao điểm của SB, SD với mp(HIJ) . Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

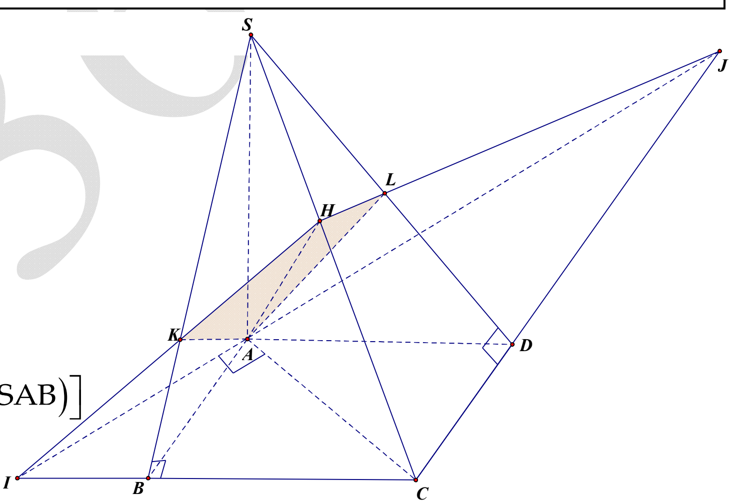
c). Tính diện tích tứ giác AKHL.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh SA $\perp$ (ABCD) và tính SA.

$BC \perp AB$ (vì ABCD là hình chữ nhật) (1) , $BC \perp SB$ (vì ΔSBC vuông tại B) (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp mp(SAB)\left[\text{vì } AB, SB \subset (SAB)\right]$



Vậy $mp(SAB) \perp mp(ABCD)\left[\text{vì } BC \subset (ABCD)\right]$ (*).

Chứng minh tương tự thì $CD \perp mp(SAD) \Rightarrow mp(SAD) \perp mp(ABCD)$ (**)

Ta có $(SAB) \cap (SAD) = SA$, và từ (*) (**) suy ra $SA \perp mp(ABCD)$.

Xét ΔSAD vuông tại A : $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a\sqrt{2}$

b). Chứng minh AK $\perp$ (SBC) và AL $\perp$ (SCD).

$(IJH) \cap (SBC) = IH$, gọi $K = SB \cap IH \Rightarrow K = SB \cap mp(IJH)$

$(IJH)\cap(SCD)=JH$, gọi $L=SD\cap JH \Rightarrow L=SD\cap mp(IJH)$

Chứng minh AK $\perp$ (SBC) :

$$\begin{cases} IA\perp AC(gt) \\ IA\perp SA\left(SA\perp(ABCD), IA\subset(ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow IA\perp mp(SAC) \quad \Rightarrow IA\perp SC \ (3)$$

$$\begin{cases} SC\perp AH(gt) \\ SC\perp IA(do(3)) \end{cases} \Rightarrow SC\perp mp(P) \ ; \ \begin{cases} SC\perp mp(P) \\ SC\subset mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow mp(P)\perp mp(SBC)$$

$$\begin{cases} mp(P)\cap(SAB)=AK \\ mp(P) \quad \perp mp(SBC) \\ mp(SAB)\perp mp(SBC) \end{cases} \Rightarrow AK\perp mp(SBC)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự $AL\perp mp(SCD)$.

c). Tính diện tích tứ giác AKHL.

Xét ΔSAB vuông tại A :

$$SB=\sqrt{AS^2+AB^2}=a\sqrt{3}, \ AK.SB=AB.AS \Rightarrow AK=\frac{AB.AS}{SB}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Xét ΔSAD vuông tại A : $AL.SD=AD.AS \Rightarrow AL=\frac{AD.AS}{SD}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Xét ΔSAC vuông tại A :

$$SC=\sqrt{AS^2+AC^2}=a\sqrt{6}, \ AH.SC=AC.AS \Rightarrow AH=\frac{AC.AS}{SC}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Vì $AK\perp(SBC)\Rightarrow AK\perp KH$. Xét ΔAKH vuông tại K :

$$KH=\sqrt{AH^2-AK^2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

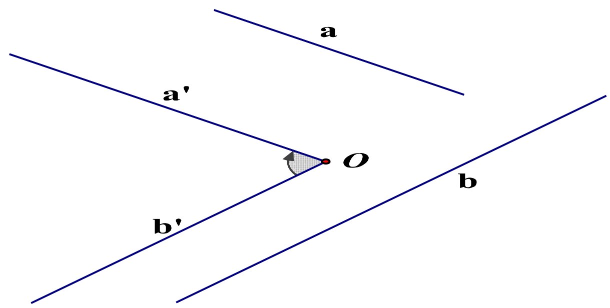
Vì $AL\perp(SCD)\Rightarrow AL\perp LH$. Xét ΔALH vuông tại L : $LH=\sqrt{AH^2-AL^2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

$$S_{AKHL}=S_{\Delta AKH}+S_{\Delta ALH}=\frac{1}{2}AK.HK+\frac{1}{2}AL.HL=\frac{1}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)=\frac{8a^2}{15}.$$

GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

• Cách xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b:

Chọn điểm O thích hợp, rồi kẻ hai đường thẳng đi qua điểm O: a'// a và b'// b.



• Các phương pháp tính góc:

+ Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác:

Định lí sin: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

Định lí cos: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

+ Tính góc theo vectơ chỉ phương: $\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$

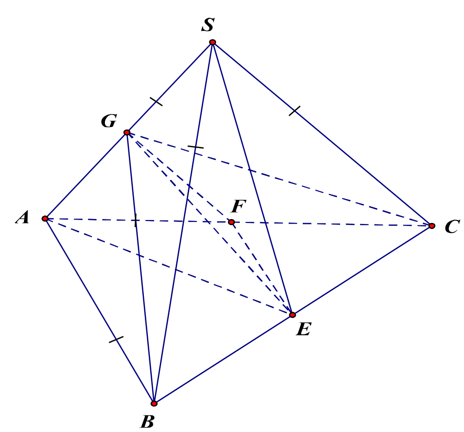
• Chú ý. + $0^0\le\varphi\le 90^0$

+ $AB\perp CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0.$

+ Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi=0^0$.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABC có SA = SB = SC = AB = AC = a, BC = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

LỜI GIẢI



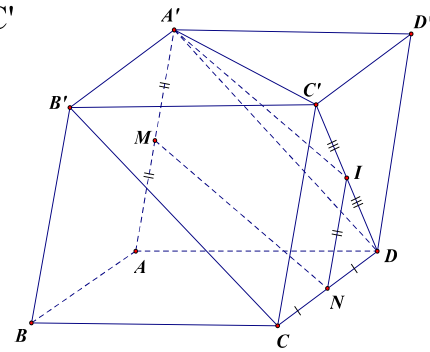
Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, SA. Ta có $EF\,||\,AB,\ FG\,||\,SC$ $\Rightarrow\left[SC,AB\right]=\left[EF,FG\right]=EFG$ hoặc 180^0-EFG. Ta có $FE=FG=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$

$\Delta BAG=\Delta CAG\left(c.g.c\right)\Rightarrow GB=GC$. Tam giác GBC cân tại G có GE là đường cao $GE=\sqrt{BG^2-BE^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$.

Tam giác EFG đều vì có 3 cạnh bằng nhau. Vậy $EFG=60^0$.

Câu 2: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có độ dài tất cả các cạnh đều bằng $a > 0$ và $BAD = DAA' = A'AB = 60^0$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AA' , CD. Chứng minh $MN \parallel mp(A'C'D)$ và tính cosin của góc tạo bởi hai đường thẳng NM và B'C.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của DC'. Trong tam giác CDC' có NI là đường trung bình của tam giác, nên :

$$\begin{cases} NI \parallel CC' \\ NI = \dfrac{1}{2}CC' \end{cases}$$

mà $\begin{cases} CC' \parallel AA' \\ CC' = AA' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NI \parallel AA' \\ NI = \dfrac{1}{2}AA' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} NI \parallel MA' \\ NI = MA' \end{cases}$

Vậy tứ giác MNIA' là hình bình hành nên $MN \parallel IA'$ mà $IA' \subset (A'C'D') \Rightarrow MN \parallel (A'C'D)$.

Vì $\begin{cases} MN \parallel IA' \\ CB' \parallel DA' \end{cases} \Rightarrow (CB', MN) = (DA', IA') = DA'I$ hoặc $180^0 - DA'I$

Ta có tam giác DAA' đều nên $DA' = a$.

Áp dụng định lý cosin cho Δ ABC có $ABC = 120^0$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$$

$AB' = a\sqrt{3}$.

Vậy có $AC = A'C' = a,\ AB' = DC' = a\sqrt{3}$.

Trong $\Delta DA'C'$ có A'I là đường trung tuyến :

$$IA'^2 = \frac{DA'^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{2} - \frac{3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow IA' = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Trong $\Delta A'DI$ ta cã : $\cos DA'I = \dfrac{DA'^2 + IA'^2 - DI^2}{2.DA'.IA'} = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} > 0$.

Kết luận : $\cos[MN, CB'] = |\cos DA'I| = \dfrac{3}{2\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 3: TSĐH K.A 2008

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = $a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt