Ví dụ 4 : Với mọi số tự nhiên n >1 chứng minh rằng : $\frac{1}{2}<\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{n+n}<\frac{3}{4}$

Ta có $\frac{1}{n+k}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$ với k = 1,2,3,…,n-1

Do đó: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

Ví dụ 5: CMR: A = $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+........+\frac{1}{n^2}$ với $n \geq 2$ không là số tự nhiên

HD: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1.2.};\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2.3};.....$

Ví dụ 6: Cho a ,b ,c ,d > 0 .Chứng minh rằng :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3$$

Giải :

Vì a ,b ,c ,d > 0 nên ta có: $\frac{a+b}{a+b+c+d}<\frac{a+b}{a+b+c}<\frac{a+b+d}{a+b+c+d}$ (1)

$$\frac{b++c}{a+b+c+d}<\frac{b+c}{b+c+d}<\frac{b+c+a}{a+b+c+d} \quad (2)$$

$$\frac{d+a}{a+b+c+d}<\frac{d+a}{d+a+b}<\frac{d+a+c}{a+b+c+d} \quad (3)$$

Cộng các vế của 4 bất đẳng thức trên ta có :

$$2<\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+d}+\frac{c+d}{c+d+a}+\frac{d+a}{d+a+b}<3 \quad \text{(đpcm)}$$

**5. Phương pháp 5:Dùng bất đẳng thức trong tam giác**

Lưu ý: Nếu a;b;clà số đo ba cạnh của tam giác thì : a; b; c > 0

Và |b-c| < a < b+c ; |a-c| < b < a+c ; |a-b| < c < b+a

Ví dụ1:

Cho a; b; clà số đo ba cạnh của tam giác chứng minh rằng

a, $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b, abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)

Giải

a)Vì a,b,c là số đo 3 cạnh của một tam giác nên ta có $\begin{cases} 0 < a < b+c \\ 0 < b < a+c \\ 0 < c < a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < a(b+c) \\ b^2 < b(a+c) \\ c^2 < c(a+b) \end{cases}$

Cộng từng vế các bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$

b) Ta có a > | b-c | $\Rightarrow a^2 > a^2 - (b-c)^2 > 0$

b > | a-c | $\Rightarrow b^2 > b^2 - (c-a)^2 > 0$

c > | a-b | $\Rightarrow c^2 > c^2 - (a-b)^2 > 0$

Nhân vế các bất đẳng thức ta được: $a^2b^2c^2 > \left[a^2 - (b-c)^2\right]\left[b^2 - (c-a)^2\right]\left[c^2 - (a-b)^2\right]$

$$\Rightarrow a^2b^2c^2 > (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \Rightarrow abc > (a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$$

Ví dụ2: (đổi biến số)

Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

(1)

Đặt x= b + c ; y= c + a ;z = a + b ta có a = $\frac{y+z-x}{2}$ ; b = $\frac{z+x-y}{2}$ ; c = $\frac{x+y-z}{2}$

ta có (1) $\Leftrightarrow$ $\frac{y+z-x}{2x}+\frac{z+x-y}{2y}+\frac{x+y-z}{2z} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1 \geq 3$

$\Leftrightarrow (\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+(\frac{z}{x}+\frac{x}{z})+(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}) \geq 6$ là Bđt đúng?

<u>Ví dụ 3:</u> (đổi biến số)

Cho a, b, c > 0 và a + b + c <1. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$ (1)

<u>Giải</u>: Đặt x = $a^2+2bc$ ; y = $b^2+2ac$ ; z = $c^2+2ab$

Ta có $x+y+z=(a+b+c)^2<1$

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 9$ Với x + y + z < 1 và x ,y,z > 0

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$x+y+z \geq 3.\sqrt[3]{xyz}$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3..\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} \Rightarrow (x+y+z).\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$

**6) phương pháp làm trội :**

Chứng minh BĐT sau :

a) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}<\frac{1}{2}$

b) $1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<2$

Giải :

a) Ta có : $\frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n-1).(2n+1)} = \frac{1}{2}.\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) < \frac{1}{2} \qquad \text{(đpcm)}$$

b) Ta có : $1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ... + \frac{1}{1.2.3.....n} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + ..... + \frac{1}{(n-1).n}$

$$< 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + .... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{(đpcm)}$$

**Bài tập về nhà:**

1) Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

HD: Ta xét hiệu: $x^2 + y^2 + z^2 + 3 - 2(x + y + z) = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

2) Cho a ,b,c là số đo ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$1 < \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

(HD: $\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c} = \frac{2a}{a+b+c}$ và $\frac{a}{b+c} > \frac{a}{a+b+c}$)

3) $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n+1} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < 2$

áp dụng phương pháp làm trội

4) Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geq a+b+c$

HD: $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}=c\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right) \geq 2c$; $\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}$ ? ; $\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}$ ?