$0<\frac{\pi}{32}+k\frac{\pi}{16}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<k<8\Rightarrow k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$0<\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow -\frac{1}{2}<k<1\Rightarrow k=0$

Vậy phương trõnh cú 8 nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Cõu 30. Tõm m để phương trõnh $2sinx+mcosx=1-m$ (1) cú nghiệm $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Giải

$m(1+cosx)=1-2\sin x$

Vì: $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên $1+cosx>0$ do đó:

$m=\frac{1-2\sin x}{1+cosx}\Leftrightarrow m=\frac{1-4\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{2cos^2x}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}(\tan^2\frac{x}{2}+1)-2\tan\frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 2m=\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1$

Cách 1: $2m=\tan^2\frac{x}{2}-4\tan\frac{x}{2}+1\Leftrightarrow 2m=(2-\tan\frac{x}{2})^2-3$

Vì $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ nên

$-1\le\tan\frac{x}{2}\le 1\Leftrightarrow 1\le 2-\tan\frac{x}{2}\le 3\Leftrightarrow 1\le(2-\tan\frac{x}{2})^2\le 9\Leftrightarrow -2\le(2-\tan\frac{x}{2})^2-3\le 6$

Vậy: $-2\le 2m\le 6\Leftrightarrow -1\le m\le 3$

Cách 2:

Đặt: $t=\tan\frac{x}{2}$ ta có $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ thì $t\in[-1;1]$ khi đó ta có: $2m=t^2-4t+1$ với

$t\in[-1;1]$ $P(t)=t^2-4t+1$ (P)

Do (P) là parabol có hệ số $a>0$ và đỉnh $I(2;-3)$ nên (P) đi xuông trên $[-1;1]$ do đó đường thẳng $y=2m$ cắt (P) với $t\in[-1;1]$ khi:

$P(-1)\le 2\,\mathrm{m}\le P(1)\Leftrightarrow -2\le 2m\le 6\Leftrightarrow -1\le m\le 3$

Cõu 31. Tõm nghiệm của phương trõnh $\sin^2 4x+3.\sin 4x.\cos 4x-4.\cos^2 4x=0$ khoảng $\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

Nhận thấy $\cos 4x=0$ không là nghiệm phương trình, chia hai vế phương trình cho $\cos 4x$, ta được phương t:

$$\tan^2 4x+3.\tan 4x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan 4x=1\\ \tan 4x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{4}\\ x=\dfrac{1}{4}\arctan(-4)+\dfrac{k\pi}{4}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Do $x\in\left(0\,;\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{16};\dfrac{5\pi}{16};\dfrac{1}{4}\arctan(-4)+\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{4}\arctan(-4)+\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Cõu 32. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$ thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow$ $\cos 5x\cos x=\cos 4x\cos 2x+3\cos^2 x+1$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 4x)=\frac{1}{2}(\cos 6x+\cos 2x)+3\cos^2 x+1$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x+6\cos^2 x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\cos 2x+3+3\cos 2x+2$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-4\cos 2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1\\ \cos 2x=3(PTVN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm thuộc khoảng $(-\pi;\pi)$ của phương trình là $x=-\dfrac{\pi}{2},x=\dfrac{\pi}{2}.$

Câu 33. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{2\pi}{5};\frac{6\pi}{7}\right)$ của phương trình: $\sqrt{3}\sin 7x-\cos 7x=\sqrt{2}$.

Giải:

$$PT\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}\cos 7x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$*Khi: x=\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\Rightarrow \frac{2\pi}{5}<\frac{5\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{5}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{5}{84}$$

$$\Leftrightarrow k=2\Leftrightarrow x_1=\frac{53\pi}{84}$$

$$*Khi: x=\frac{11\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}\Rightarrow \frac{2\pi}{5}<\frac{11\pi}{84}+\frac{k2\pi}{7}<\frac{6\pi}{7}\Leftrightarrow \frac{2}{5}-\frac{11}{84}<\frac{2k}{7}<\frac{6}{7}-\frac{11}{84}$$

$$\Leftrightarrow k=1,2\Leftrightarrow x_2=\frac{35\pi}{84};x_3=\frac{59\pi}{84}$$

Câu 34. Tìm các nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2};3\pi\right)$ của phương trình:

$$\sin\left(2x+\frac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x\ (*)$$

Giải:

$$(*)\Leftrightarrow sin\left(2x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right)-3\cos\left(x+\frac{\pi}{2}-4\pi\right)=1+2\sin x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+3\sin x=1+2\sin x\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x=1-\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\Rightarrow x=k\pi\\ \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$Do\ x\in(\frac{\pi}{2};3\pi)\Rightarrow x_1=\pi;x_2=2\pi;x_3=\frac{13\pi}{6};x_4=\frac{5\pi}{6};x_5=\frac{17\pi}{6}$$

Câu 35. Tìm m để phương trình $\sin x+m\cos x=m$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\frac{7\pi}{3}\right)$

Giải:

$$PT \Leftrightarrow \sin x = m(1-\cos x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ m = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ và } x = 2\pi \\ m = \dfrac{\sin x}{1-\cos x} (*) \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình ban đầu có 4 nghiệm thì (*) phải có 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$

Nhưng số nghiệm của (*) thuộc khoảng $\left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$ lại chính là số giao điểm của đường thẳng $y = m$ với đồ thị (C) có phương trình: $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$ *trên* $D = \left(-\pi;\dfrac{7\pi}{3}\right)$

$$\text{Xét hàm}: y' = \frac{\cos x - 1}{(1-\cos x)^2} < 0\ \forall x \in D$$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra giá trị m cần tìm là $\left[\begin{array}{l} m \ge \sqrt{3} \\ m \le 0 \end{array}\right.$.

Câu 36. **Tìm m để** $m(\sin x + \cos x + 1) = 1 + 2\sin x \cos x$ **có nghiệm thuộc** $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Ta có: $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{4} \le x + \dfrac{\pi}{4} \le \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \le 1 \Rightarrow 1 \le t \le \sqrt{2}$

Khi đó phương trình trở thành: $m(t+1) = 1 + (t^2 - 1) \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2}{t+1}$

Xem hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t+1}, \text{t} \in \left[1,\sqrt{2}\right]$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in \left[1,\sqrt{2}\right]$$

Suy ra $f(t)=\dfrac{t^2}{t+1}, t\in\left[1,\sqrt{2}\right]$ là hàm tăng trên $\left[1,\sqrt{2}\right]$.

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow f(1)\le m\le f(\sqrt{2})\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m\le 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Câu 37. Cho phương trình: $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x=m(\sin x+\cos x)$ (1). Tìm m để phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

GIẢI

Ta có: $2\cos 2x+\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x$

$=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$

$=2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$

$=(\sin x+\cos x)\left[2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x\right]$

Do đó $(1)\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left[2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-m\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0 \quad (2)\\ 2(\cos x-\sin x)+\sin x\cos x-m=0 \quad (3)\end{array}\right.$$

Ta có $(2)\Leftrightarrow \sin x=-\cos x\Leftrightarrow tgx=-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

Đặt $t=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4}), |t|\le\sqrt{2}$

Khi đó phương trình (3) trở thành : $2t+\dfrac{1-t^2}{2}-m=0\Leftrightarrow t^2-4t+2m-1=0$ (*)

Ta có: $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}\le x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{3\pi}{4}$

<u>Nhận xét:</u> Nghiệm của (2) không thuộc $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Do đó: Phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Suy ra phương trình (*) có nghiệm thuộc $[-1;1]$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t = 1 - 2m$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 4t$ trên $[-1;1]$

$\Rightarrow f'(t) = 2t - 4 < 0, \forall t \in [1,-1]$

$\Rightarrow y = f(t) = t^2 - 4t$ là hàm số giảm trên $[-1;1]$.

Vậy $ycbt \Leftrightarrow f(1) \le 1 - 2m \le f(-1) \Leftrightarrow -3 \le 1 - 2m \le 5 \Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Câu 38. Tỡm nghiệm dương nhỏ nhất của phương trỡnh: $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

Giải:

Ta có $\sin 2x + \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x + 3\sin x - \cos x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - (2\cos x + 3)\sin x + \cos x + 1 = 0 \quad (1)$

Chú ý : (1) là phương trình bậc 2 với biến $\sin x$

Ta có : $\Delta = (2\cos x + 3)^2 - 8(\cos x + 1) = (2\cos x + 1)^2$

Nghiệm của (1) : $\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{2\cos x + 3 + 2\cos x + 1}{4} = \cos x + 1 \\ \sin x = \dfrac{2\cos x + 3 - 2\cos x - 1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \cos x + 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k2\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array} \right. ; k \in \mathbb{Z}$$

Vậy, nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{6}$.