PHẦN V - BÀI TẬP TỰ GIẢI

1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2yz + 2zx$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2(x + y + z)$

d) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + k^2 \geq x(y + z + t + k)$

e) $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq (\dfrac{x + y + z}{3})^2$

2. Cho $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$

a) $\dfrac{a_1 + a_2}{2}.\dfrac{b_1 + b_2}{2} \leq \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{2}$

b) $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}.\dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \leq \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3}$

áp dụng: $(x + y)(x^3 + y^3)(x^7 + y^{7)} \leq 4(x^{11} + y^{11})$ Với x,y >0

3Cho $a, b, c, d \geq 0$ Thoã $a \geq c + d,\ b \geq c+d$

Chứng minh: $ab \geq ad + bc$

4. Cho a,b,c >0 thoã $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{5}{3}$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{1}{abc}$$

5.Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \leq 3 + a^2b + b^2c + c^2a.$$

6. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

b) $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}\geq\frac{2}{1+xy}$ Với $(xy\geq 1)$

7. Cho 0 < a < b < c. Chứng minh rằng:

a) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)<0$

b) $b(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+\frac{1}{b}(a+c)<(a+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})$

8. Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác.Chứng minh rằng:

a) $a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$

b) $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

c) $a^3+b^3+c^3+2abc<a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$

d) $a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a+b)^2>a^3+b^3+c^3$

e) $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4>0$

9. Cho $0\leq a,b,c,d\leq 1$ Chứng minh rằng:

$$(a+b+c+d)^2\geq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

10. Cho a_1, a_2>0 và $a_1c_1\geq b_1^2,\ a_2b_2\geq b_2^2$ .Chứng minh rằng:

$$((a_1+a_2)(c_1+c_2)\geq(b_1+b_2)^2$$

11. Cho a, b, c >0. Chứng minh:

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$

12. a,b,c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh:

$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$

13. Cho a, b, c, d >0 và abcd=1. Chứng minh rằng:

$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$

14. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M ở trong tam giác, các đường thẳng AM, BM, CM cắt các cạnh của tam giác lần lượt A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng:

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}\ge 6$$

15. Cho a,b>0 và x+y=1. Chứng minh rằng:

$$\frac{2}{ab}+\frac{3}{a^2+b^2}\ge 14$$

16. Chứng minh điều kiện cần và đủ để các số a, b, c cùng dấu là

ab+bc+ca>0 và $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}>0$

17. Chứng minh rằng không tồn tại 3 số x,y,z đồng thời thoã mãn ba bất đẳng thức sau: $|x|<|y-z|,\ |y|<|z-x|,\ |z|<|x-y|$

18. Cho 0<a,b,c<1. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai: $a(1-b)>\frac{1}{4},\ b(1-c)>\frac{1}{4},\ c(1-a)>\frac{1}{4}$

19. Cho 4 số a,b,c,d thoã mãn điều kiện $ac\ge 2(b+d)$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai:

$a^2=4b,\ c^2=4d$

20. Chứng minh rằng một trong các bất đẳng thức sau là đúng:

$a^2+b^2\ge\frac{1}{2}(b+c)^2,\ b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(c+a)^2,\ c^2+a^2\ge\frac{1}{2}(a+b)^2$

21. Cho a, b >0 . Chứng minh

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}\right)<\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$$

22. Cho a, b, c >0 . Chứng minh

$$A=\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}$$

Không là số nguyên.

23. Cho a ,b ,c là độ dài của 3 cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng:

$$1<\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

24.Cho n là số nguyên dương, chứng minh:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1$$

25. Chứng minh rằng:

a) $\frac{5}{11}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}<\frac{1}{2}$ Với $n\geq 1$

b) $\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}>\frac{1}{4}$ Với $n\geq 1$

c) $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1(n\geq 2)$

26. Cho $a_n=\frac{2}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}(n=1,2,\ldots)$

Chứng minh rằng: $a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{n}{n+2}$

27. Cho a>b>0. Chứng minh rằng: $a+\frac{1}{b(a-b)}\geq 3$

28. Cho a,b,c >0, a+b+c=1. Chứng minh rằng:

$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c})\geq 64$

29. Cho a_1, a_2 ,a_3 ,a_4 , a_5 >0

Có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$(\frac{1}{a_1}-1)(\frac{1}{a_2}-1)(\frac{1}{a_3}-1)(\frac{1}{a_4}-1)(\frac{1}{a_5}-1)\geq 1024$

30. Cho hình thang ABCD có AD//BC có diện tích S. Gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng $S_{ABE}\leq\frac{1}{4}S$

31. Cho a,b,c là 3 cạnh của tam giác có chu vi 2p. Chứng minh rằng:

$\sqrt{p}<\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}\leq\sqrt{3p}$

32. Cho 3x-4y =7 .Chứng minh rằng: $3x^2-4y^2 \geq 7$

HƯỚNG DẪN – GỢI Ý BT TỰ GIẢI

Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

1. a) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$

b) $(x-y+z)^2 \geq 0$

c) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \geq 0$

d) $(\frac{x}{2}-y)^2+(\frac{x}{2}-z)^2+(\frac{x}{2}-t)^2+(\frac{x}{2}-k)^2 \geq 0$

e) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$

2. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

a) $\frac{1}{2}(a_1b_1+a_2b_2)-\frac{1}{2}(a_1+a_2)\frac{1}{2}(b_1+b_2)=\frac{1}{4}(a_1-a_2)(b_1-b_2) \geq 0$

b) $(a_1-a_2)(b_1-b_2)+(a_2-a_3)(b_2-b_3)+(a_1-a_3)(b_1-b_3) \geq 0$

3. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

$a-c \geq d, b-d \geq c \Rightarrow (a-c)(b-d) \geq cd \Rightarrow$ điều phải chứng minh.

4. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

$(a+b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow ac+bc-ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{5}{6}<1$

5. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

$(1-a^2)(1-b) \geq 1+a^2b \geq a^2+b \geq a^3+b^3$

Tương tự: $1+b^2c \geq b^3+c^3, 1+c^2a \geq c^2+a^3$ .cộng lại được điều phải chứng minh

6. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương

a) $ac + bd \le \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$ đúng

b) $(x - y)^2(xy - 1) \ge 0$

7 Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương và các

a) $(a - b)(c - a)(c - b)(ab + bc + ca) < 0$ vì $(0 < a < b < c)$;

b) $(a + c)(b - c)(b - a) < 0$

8. Sử dụng phương pháp định nghĩa và phép biến đổi tương đương và các Bất đẳng thức trong tam giác.

a) $a^2 < a(b + c), b^2 < b(b + c),\ c^2 < c(c + a)$ cộng lại được điều phải chứng minh;

$(a + b - c)(b + c - a) \le b^2$

b) $(b + c - a)(c + a - b) \le c^2$

$(c + a - b)(a + b - c) \le a^2$

Nhân các vế bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh

c) $(a - b - c)(a + b - c)(a + c - b) < 0$

d) $(a + b - c)(b + c - a)(a + c - b) > 0$

e) $(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) > 0$

9.Áp dụng Bất đẳng thức phụ

Áp dụng $(x + y)^2 \ge 4xy$ và $x \ge x^2$ $khi\ 0 \le x \le 1$

10. Áp dụng $(x + y)^2 \ge 4xy$

11. .Áp dụng Bất đẳng thức phụ

Chia ra 3 bất đẳng thức nhỏ sau đó:

Cộng vế theo vế và áp dụng $(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \ge 9 \quad (x, y, z > 0)$

12. Áp dụng phương pháp đổi biến số

Đặt $x = b + c - a,\ y = a + c - b,\ z = a + b - c$ và áp dụng $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với $x, y > 0$

13. Ta có $cd = \frac{1}{ab}$ nên $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd) = 2(ab + \frac{1}{ab}) \geq 4$

Và $a(b+c) + b(c+d) + d(c+a) = (ab + \frac{1}{ab}) + (ac + \frac{1}{ac}) + (bc + \frac{1}{bc}) \geq 6$

14. Gọi S, S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tâm giác ABC, MBC, MAC, MAB. Ta có:

$$\frac{AA_1}{A_1M} = \frac{S}{S_1} \Rightarrow \frac{AM}{A_1M} = \frac{AA_1 - MA}{A_1M} = \frac{S - S_1}{S_1} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$

Tương tự cho $\frac{BM}{B_1M}$ và $\frac{CM}{C_1M}$ Sau đó áp dụng $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (x > 0).

15. $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} = \frac{4}{2ab} + \frac{3}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2ab} + 2(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2})$

Áp dụng $(x + y)^2 \geq 4xy$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$ $(x, y > 0)$

16. Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng

Xét hai trường hợp

TH1: $abc > 0$ thì a > 0, b > 0, c > 0

TH2: abc < 0 thì a < 0, b < 0, c < 0.

17. Bình phương hai vế của bất đăng thức đã cho, chuyển về vế trái rồi nhân lại

18. $0 < a(1 - a) = \frac{1}{4} - (a - \frac{1}{2}) \leq \frac{1}{4}$

19. $a^2 + c^2 < 4(b + d) \leq 2ac$ Vô lý

20. Giả sử $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}(b + c)^2,\ b^2 + c^2 < \frac{1}{2}(c + a)^2,\ c^2 + a^2 < \frac{1}{2}(c + a)^2$

Cộng lại ta được: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0$, vô lý !

21. Sử dụng các tính chất đặc biệt của tỉ lệ thức.

$\frac{a}{1+a} < \frac{a+b}{1+a+b}, \frac{b}{1+b} < \frac{a+b}{1+a+b}$

22. Sử dụng các tính chất đặc biệt của tỉ lệ thức

$\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d}$. tương tự cho các BĐT khác rồi cộng lại ta được: $1 < A < 2$

23. Tương tự bài 22: $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{a+b+c}$

24. Sử dụng phương pháp làm trội

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{n^2-n}{n^2} = 1$

25. Sử dụng phương pháp làm trội

a) $\frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{2k^2+2k+1} < \frac{1}{2}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1});$

b) $\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4k^2+4k+1} < \frac{1}{4k(k+1)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1});$

c) $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ và

$\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

26. Sử dụng phương pháp làm trội

$a_k = \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{\sqrt{4k^2+4k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

27. Sử dụng BĐT Cosi

$a + \frac{1}{b(a-b)} = (a-b) + b + \frac{1}{b(a-b)} \geq 3$

28. Sử dụng BĐT Cosi

$$a+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b+c}{a}=1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$$

29. Sử dụng BĐT Cosi

$$\frac{1}{a_1}-1=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{a_1}-1=\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_4}{a_1}+\frac{a_5}{a_1}\geq\frac{4\sqrt[4]{a_2a_3a_4a_5}}{a_1}$$

30. Sử dụng BĐT Cosi

Chỉ cần chứng minh $S^2{}_{ABE}=S_{CEB}.S_{AED}$ và $\left(\frac{S_{ABE}}{S}\right)^4=\frac{x^2y^2}{(x+y)^4}$,

với x = BC, y = AD

31. Sử dụng BĐT Bunhiacopsky

$$(1.\sqrt{p-a}+1.\sqrt{p-b}+1.\sqrt{p-c})^2\leq 3p$$

32. Sử dụng BĐT Bunhiacopsky

$$49=(3x-4y)^2=(\sqrt{3}\sqrt{3x}+(-2).2y)^2\leq 7(3x^2+4y^2).$$