Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0)=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x=0$.

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT TẬP HỢP

Ví dụ 1: Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R.

a). $f(x)=x^4-x^2+2$

b). $f(x)=x^2.\sin x-2\cos^2 x+3$

c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$

d). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\le 1\end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $f(x)=x^4-x^2+2$. TXĐ: $D=R$

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^4-x^2+2\right)=x_0^4-x_0^2+2=f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

b) $f(x)=x^2.\sin x-2\cos^2 x+3$. TXĐ: $D=R$

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2.\sin x-2\cos^2 x+3\right)$

$=x_0^2\sin x_0-2\cos^2 x_0+3=f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Nếu $x\neq -1$ thì $f(x)=\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ (1).

Bây giờ ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0=-1$

Ta có: $f(x_0)=f(-1)=\frac{7}{3}$

Ta có: $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3+x+3}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x^2-2x+3)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1}=\frac{7}{3}$

Vì $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0=-1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) liên tục trên R.

d) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\le 1\end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Với mọi $x_0\in(1;+\infty)$, ta có $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\frac{x_0^2-4x_0+3}{x_0-1}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0\in(-\infty;1)$, ta có $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left(-\sqrt{5-x}\right)=-\sqrt{5-x_0}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0=1$

Ta có: $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x-3)=-2.$

Ta có: $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{5-x}\right)=-2.$

Và có $f(1)=-\sqrt{5-1}=2$

Vì $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Rightarrow$ Hàm số liên tục tại 1 (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra f(x) liên tục trên R.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1 & x\le 3\\ ax+b & 3<x<5\\ 7 & x\ge 5\end{cases}$

Xác định a, b để hàm số liên tục trên R.

LỜI GIẢI

Ta có tập xác định của hàm số f(x) là $D=\mathbb{R}$.

Ta có: hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;3),(3;5),(5;+\infty)$ (vì là hàm đa thức).

Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x=3$ và $x=5$.

+ Tại $x=3$:

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 1=1$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(ax+b)=3a+b$ và $f(3)=1$.

Do đó hàm liên tục tại $x=3$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Leftrightarrow 3a+b=1 \quad (1)$

+ Tại $x=5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=5a+b$ và $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=7=f(5)$.

Do đó hàm số liên tục tại $x=5$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=f(5)\Leftrightarrow 5a+b=7 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi: $\begin{cases}3a+b=1\\5a+b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-8\end{cases}$.

Vậy với $a=3,b=-8$ thì hàm số liên tục trên R.

Ví dụ 3 : Xét xem các hàm số sau có liên tục với $\forall x\in R$ không? Nếu không? Chỉ ra các điểm gián đoạn.

a) $f(x)=2x^4-4x^3+2x-1$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2-3x+2}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & x\neq-\dfrac{1}{2}\\ 2 & x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+6x^2+x+3}{x+3} & x\neq-3\\ 19 & x=-3\end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Hàm số $f(x)=2x^4-4x^3+2x-1$ liên tục với $\forall x\in R$ vì $f(x)$ là hàm đa thức.

b). Hàm số $f(x)=\frac{3x^2-4x+5}{x^2-3x+2}$ liên tục với $\forall x\in R\setminus\{1;2\}$, gián đoạn tại các điểm $x=1, x=2$ vì $f(x)$ không xác định tại $x=1$ và $x=2$.

c). Hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{2x+1}{2x^2+3x+1} & x\neq -\frac{1}{2}\\ 2 & x=-\frac{1}{2}\end{cases}$

-Với $x\in R\setminus\left\{-1;-\frac{1}{2}\right\}, f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục.

-Với $x=-\frac{1}{2}; \lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{1}{x+1}=2=f\left(-\frac{1}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=-\frac{1}{2}$.

-Hàm số gián đoạn tại $x=-1$ vì nó không xác định tại $x=-1$.

d). Với $x\neq -3, f(x)$ là phân thức hữu tỉ nên liên tục.

Tại $x=-3; f(-3)=19;$

$$\lim_{x\to-3} f(x)=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(2x^2+1)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(2x^2+1)=19=f(-3).$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=-3$.

Vậy hàm số liên tục với $\forall x\in R$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3+8}{x^2-4} & \text{khi } x>-2\\ -3 & \text{khi } x=-2\\ \sqrt{3+x}-5 & \text{khi } -3\le x<-2\end{cases}$. Tìm các khoảng, nửa khoảng mà trên đó hàm số f(x) liên tục.

LỜI GIẢI

Vì $x^2-4\neq 0$ với mọi $x>-2$ nên hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$ xác định trên khoảng $(-2;+\infty)$. Ta có $\forall x_0\in(-2;+\infty)$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}=\dfrac{x_0^3+8}{x_0^2-4}=f(x_0)$ nên hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Với mọi $x\in[-3;-2)$ thì $3+x\geq 0$, do đó hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}-5$ xác định trên nửa khoảng $[-3;-2)$. $\forall x_0\in[-3;-2)$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sqrt{3+x}-5\right)=\sqrt{3+x_0}-5=f(x_0)$ nên hàm số f(x) liên tục trên nửa khoảng $[-3;-2)$.

Tại $x_0=-2$, ta có $f(-2)=-3$. Và $\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\sqrt{3+x}-5\right)=-4\neq f(-2)$ nên hàm số f(x) không liên tục tại $x=-2$.

Kết luận hàm số f(x) liên tục trên $(-2;+\infty)$ và trên $[-3;-2)$.

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=0$.

Bước 2: Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$.

Bước 3: Chứng minh hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Chú ý:

Nếu $f(a).f(b)\leq 0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $[a;+\infty)$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;+\infty)$.

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty;a]$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-\infty;a)$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;2)$

LỜI GIẢI

Hàm số $f(x)=4x^3-8x^2+1$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1)=-11, f(2)=1$ nên $f(-1).f(2)<0$

Do đó theo tính chất hàm số liên tục, phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;2)$

Ví dụ 2 : Chứng minh phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=4x^4+2x^2-x-3$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

$f(-1)=4+2+1-3=4; f(0)=-3; f(1)=2.$

Vì $f(-1).f(0)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$

$f(1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Mà hai khoảng $(-1;0),(0;1)$ không giao nhau. Từ đó suy ra phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

Ví dụ 3 : Chứng minh phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng năm nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^5-5x^3+4x-1$ thì $f(x)$ liên tục trên R

Ta có $f(x)=x(x^4-5x^2+4)-1=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)-1$

$f(-2)=-1; f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{105}{32}-1>0; f(-1)=-1<0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{45}{32}-1>0; f(1)=-1<0; f(3)=120-1=119>0$

Vì $f(-2).f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

Vì $f\left(-\frac{3}{2}\right).f(-1)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

Vì $f(-1).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Vì $f(1).f(3)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(1;3)$.

Do các khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;3)$ không giao nhau nên phương trình có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng trên.

Mà phương trình bậc 5 có không quá 5 nghiệm suy ra phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng nếu $2a+3b+6c=0$ thì phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k\in Z$.

LỜI GIẢI

Đặt $t=\tan x$, vì $x\in\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ nên $t\in(0;1)$ phương trình đã cho trở thành:

$at^2+bt+c=0 \quad (*)$ với $t\in(0;1)$

Đặt $f(t)=at^2+bt+c$ thì $f(t)$ liên tục trên R.

Ta sẽ chứng minh phương trình $(*)$ luôn có nghiệm $t\in(0;1)$.

Cách 1: Ta có $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{c}{9}(4a+6b+9c)=\frac{c}{9}\left[2(2a+3b+6c)-3c\right]=-\frac{c^2}{3}$.

-Nếu $c=0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t=\frac{2}{3}\in(0;1)$

-Nếu $c\neq 0$ thì $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right)<0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left(0;\frac{2}{3}\pi\right)$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in(0;1)$

Vậy phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k\in Z.$

Cách 2:

Ta có $f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=c+4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)+a+b+c=2a+3b+6c=0 \quad (**)$

-Nếu $a=0$ từ giả thiết suy ra $3b+6c=0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t=\frac{1}{2}\in(0;1)$

-Nếu $a\neq 0$ thì $f(x), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)$ không thể đồng thời bằng 0 (vì phương trình bậc hai không có quá hai nghiệm).

Khi đó, từ $(**)$ suy ra trong ba số $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f(1)$ phải có hai giá trị trái dấu nhau (Ví nếu cả ba giá trị đó cùng âm hoặc cùng dương thì tổng của chúng không thể bằng 0).

Mà hai giá trị nào trong chúng trái dấu thì theo tính chất hàm liên tục ta đều suy ra phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm $t\in(0;1)$.

Vậy phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right), k\in Z.$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32$ (với m là tham số). Chứng minh rằng với $m<-2\vee m>2$ thì phương trình $f(x)=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 và thỏa điều kiện $x_1<0<x_2<x_3$.

LỜI GIẢI