

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x+1} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$

$$\text{Mà } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x+1} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x+1-1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{x+1}+1} = 1.$$

$$\text{Và } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8-8+x}{x(4+2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} = \frac{1}{12}.$$

$$\text{Nên } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.$$

Do đó hàm số có giới hạn tại $x=0$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow b-1 = \frac{13}{12} \Leftrightarrow b = \frac{25}{12}. \quad (1)$$

Tại $x=-2$:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax+b-1) = -2a+b-1.$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x-2) = -2-2 = -4.$$

Do đó hàm số có giới hạn tại $x=-2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) \Leftrightarrow -2a+b-1 = -4. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: hàm số cùng có giới hạn tại $x=0$ và $x=-2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b = \frac{25}{12} \\ -2a + b - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{25}{12} \\ a = \frac{61}{24} \end{cases}.$$

Vậy với $a = \frac{61}{24}, b = \frac{25}{12}$ thì hàm số cùng có giới hạn tại $x=0$ và $x=-2$.

Câu 6 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b). $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}}$ c). $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}}$ d). $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}}$

LỜI GIẢI

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2}+2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)} = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4-x^2}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(2+x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(\sqrt{2-x})^2(2+x)}{\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x}(2+x) = 0.$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^5+x^4}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)(x+2)}{\sqrt{x^4(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(\sqrt{x+1})^2(x+2)}{x^2\sqrt{x+1}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}(x+2)}{x^2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-4)(x-3)}}{\sqrt{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{(x-4)(x-3)}{(3-x)(3+x)}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{(4-x)(3-x)}{(3-x)(3+x)}} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{\frac{4-x}{3+x}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

Câu 7 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x^3+1) \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right]$ b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x} \right]$

c). $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+5x-3}{(x+3)^2}$ d). $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

e). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-3x+2|}{x-2}$ f). $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}}$

LỜI GIẢI

$$\begin{aligned} \text{a). } \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x^3 + 1) \sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right] &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(x+1)(x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[(\sqrt{x+1})^2 (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \right] = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\sqrt{x+1} (x^2 - x + 1) \sqrt{\frac{x}{x-1}} \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b). } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[x \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + 1-x} \right]$$

Vì $x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}(2 + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{2 + \sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{c). } L = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2 + 5x - 3}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-1}{x+3}$$

Ta có $x \rightarrow -3^+ \Rightarrow x > -3 \Rightarrow x+3 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^+} (x+3) = 0^+$, và $\lim_{x \rightarrow -3^+} (2x-1) = -7$.

Kết luận $L = -\infty$.

$$\text{d). } L = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$$

Ta có $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0^-$, và $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 3$, và $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4$

Kết luận $L = -\infty$.

$$\text{e). } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|(x-2)(x-1)|}{x-2}$$

$$\text{Nếu } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|(x-2)(x-1)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 1.$$

Nếu $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x-2)(x-1)|}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1-x) = -1.$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{x^2 - \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{2(2-x)\left(\frac{1}{2}-x\right)}}{-\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{1}{2}+x\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left[-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-x}} \cdot \frac{\sqrt{2(2-x)}}{\frac{1}{2}+x} \right]$$

Mà $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}-x}} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left[\frac{\sqrt{2(2-x)}}{\frac{1}{2}+x} \right] = \sqrt{3}.$ Do đó $L = -\infty.$

f). $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}}$

Với mọi $x > 1$ ta có : $(1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}} = -(x-1) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}}$

$$= -\sqrt{\frac{(x-1)^2(x+5)}{(x-1)(x+3)}} = -\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x+3}}.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) \sqrt{\frac{x+5}{x^2+2x-3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -\sqrt{\frac{(x-1)(x+5)}{x+3}} = 0.$

Câu 8 : Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ với $f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{khi } x < 1 \\ x = -13, & \text{khi } x = 1 \\ 1 - \sqrt{7x^2 + 2}, & \text{khi } x > 1 \end{cases}$

b). $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ với $g(x) = \begin{cases} \frac{3x-2}{x+1}, & \text{khi } x < -2 \\ x+10, & \text{khi } x \geq -2 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-3) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \sqrt{7x^2 + 2}) = -2 \end{cases}$

Vậy ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

$$\text{b). Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x-2}{x+1} = 8 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+10) = 8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 8$$

Chú ý: giới hạn của hàm số và giá trị của hàm số tại điểm lấy giới hạn có thể bằng nhau, có thể khác nhau. Trong thí dụ trên:

câu a) có $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2 \neq (1) = -13$, còn câu b) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2) = 8$

Câu 9: Tìm giới hạn của hàm số $g(x) = \begin{cases} \frac{3x-1}{x+1}, & \text{khi } x < 0 \\ x+10, & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

LỜI GIẢI

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x-2}{x+1} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+10) = 10 \end{cases}$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ nên hàm số không có giới hạn tại $x = 0$.

Câu 10: Tìm m để hàm số $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1}, & \text{khi } x < -1 \\ mx^2 - x + m^2, & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = -1$.

LỜI GIẢI

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - x + 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (mx^2 - x + m^2) = m^2 + m + 1 \end{cases}$$

Hàm số có giới hạn tại $x = -1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} h(x)$

$$3 = m^2 + m + 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$