$\overrightarrow{SG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.

Mặt phẳng (A’B’C’) đi qua điểm G khi và chỉ khi bốn điểm G, A’, B’, C’ đồng phẳng, nên theo ví dụ trên, điều đó xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=1\Leftrightarrow a+b+c=3$.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{MN}+\underbrace{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}}_{\vec{0}}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$ (1).

Vì $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BQ}$, từ đó (1) suy ra:

$\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BQ}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MQ}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right)\left(\text{do }\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}\right)$

Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}\right)$ chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng, nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 5: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}$ và $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC},\ (k\neq 1)$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Có $\overrightarrow{PA}=k\overrightarrow{PD}\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}$; $\overrightarrow{QB}=k\overrightarrow{QC}\Rightarrow\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}$

Có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MN}$. Do đó:

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\frac{\overrightarrow{MA}-k\overrightarrow{MD}}{1-k}+\frac{\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}}{1-k}=\frac{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-k\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)}{1-k}=\frac{2k}{1-k}\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{2k}{1-k}\overrightarrow{MP}+\frac{2k}{1-k}\overrightarrow{MQ}$ chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{MP},\ \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng, nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS}=-2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba véc tơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

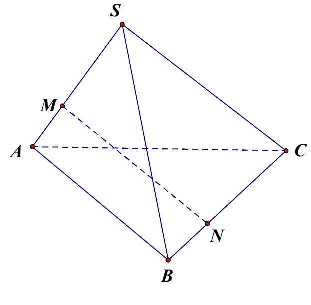
LỜI GIẢI

Có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{SA}$

$=\overrightarrow{SC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{SA}$

$=\overrightarrow{SC}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}\right)-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}\right)$

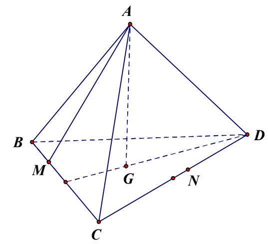
$=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



Vậy $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hai điểm M, N lần lượt thuộc BC, CD sao cho $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{4}, \frac{NC}{ND}=\frac{3}{2}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, M, N, G đồng phẳng.

LỜI GIẢI



Có $\frac{BM}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow \overrightarrow{MC}=-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AB}$ (1).

$\frac{NC}{ND}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2\overrightarrow{NC}=-3\overrightarrow{ND}\Rightarrow 5\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{AD}$ (2).

Lấy (1) cộng với (2) vế theo vế được:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\frac{4\overrightarrow{AM}+5\overrightarrow{AN}}{3}$ (3)

Vì G trọng tâm ΔBCD nên $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ (4).

Thay (3) vào (4) được: $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{9}\overrightarrow{AM}+\frac{5}{9}\overrightarrow{AN}$, từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}$ đồng phẳng. Suy ra bốn điểm A, M, N, G đồng phẳng.

Câu 8: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. Điểm K thuộc B'C' sao cho $\overrightarrow{KC'}=-2\overrightarrow{KB'}$. Chứng minh rằng bốn điểm A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Ta có:

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{a}+\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ (1).

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{1}{2}\left(2\vec{a}+\vec{c}\right)$ (2).

$\overrightarrow{AK}=\frac{\overrightarrow{AC'}+2\overrightarrow{AB'}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{c}+2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{3}=\frac{3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{3}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}\right)$ chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ đồng phẳng, nên bốn điểm A, K, I, J cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 9: Cho tứ diện ABCD, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}=-2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM}=k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB}=k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, K thẳng hàng.

LỜI GIẢI

Ta có $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MJ}$ (1).

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{NJ}$ (2).

Từ (2) có $k\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{ID}+k\overrightarrow{DN}+k\overrightarrow{NJ}\Leftrightarrow k\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+k\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{JM}$ (3).

Từ (1), (3) ta có: $(1-k)\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AM}-k\overrightarrow{DN}\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{AM}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{DN}$

Chứng minh tương tự có: $\overrightarrow{JK}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{MB}-\frac{k}{1-k}\overrightarrow{NC}$ $(*)$

Mặt khác $\overrightarrow{MA}=-2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}=-2\overrightarrow{NC}$ nên: $\overrightarrow{IJ}=\frac{2}{1-k}\overrightarrow{MB}-\frac{2k}{1-k}\overrightarrow{NC}$ $(**)$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{JK}$. Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Câu 10: Cho tứ diện ABCD. Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{DP}=k\overrightarrow{DC}$. Hãy xác định k để bốn điểm P, Q, M, N cùng nằm trên một mặt phẳng.

LỜI GIẢI

Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ mặt khác $\overrightarrow{BN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $MN\parallel AC$.

Nếu có k để các điểm M, N, P, Q thuộc một mặt phẳng thì (MNQ) cắt (ACD) theo giao tuyến PQ nên $PQ\parallel AC$

Mặt khác $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$, Vậy $k=\frac{1}{2}$ thì các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 11: Cho hình tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD; M là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{MA}=k_1\overrightarrow{MC}$; N là điểm thuộc BD sao cho $\overrightarrow{NB}=k_2\overrightarrow{ND}$. Chứng minh rằng các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi $k_1=k_2$.

LỜI GIẢI

Vì $\overrightarrow{MA}=k_1\overrightarrow{MC}\Rightarrow\overrightarrow{IM}=\dfrac{\overrightarrow{IA}-k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1}$.

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{IN}=\dfrac{\overrightarrow{IB}-k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2}=\dfrac{-\overrightarrow{IA}-k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2}$

Mặt khác có: $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$.

Để các điểm I, J, M, N cùng thuộc một mặt phẳng, điều kiện cần và đủ là ba véc tơ $\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IN},\ \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng. Rõ ràng là $\overrightarrow{IN}$ và $\overrightarrow{IJ}$ không cùng phương, nên điều khẳng định $\overrightarrow{IM},\ \overrightarrow{IN},\ \overrightarrow{IJ}$ đồng phẳng tương đương với $\overrightarrow{IM}=p\overrightarrow{IN}+q\overrightarrow{IJ}$

Hay $\dfrac{\overrightarrow{IA}-k_1\overrightarrow{IC}}{1-k_1}=p.\dfrac{-\overrightarrow{IA}-k_2\overrightarrow{ID}}{1-k_2}+q.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1-k_1}+\frac{p}{1-k_2}\right)\overrightarrow{IA}-\left(\frac{k_1}{1-k_1}+\frac{q}{2}\right)\overrightarrow{IC}+\left(\frac{pk_2}{1-k_2}-\frac{q}{2}\right)\overrightarrow{ID}=\vec{0}$$

Do $\overrightarrow{IA},\ \overrightarrow{IC},\ \overrightarrow{ID}$ không đồng phẳng nên đẳng thức trên tương đương với:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-k_1}+\dfrac{p}{1-k_2}=0\\ \dfrac{k_1}{1-k_1}+\dfrac{q}{2}=0\\ \dfrac{pk_2}{1-k_2}-\dfrac{q}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\frac{k_1}{1-k_1}=-\frac{pk_2}{1-k_2}=\frac{k_2}{1-k_1}\Rightarrow k_1=k_2$$

DẠNG 4: Tính góc giữa hai vectơ hoặc giữa hai đường thẳng:

Áp dụng $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}$.

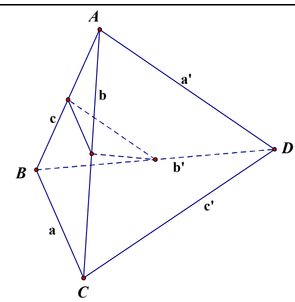
Chú ý: Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.

Nếu tính $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=\alpha<90^0\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AB và CD là α

Nếu tính $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)=\alpha>90^0\Rightarrow$ góc giữa hai đường thẳng AB và CD là $180^0-\alpha$

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có $AB = c, CD = c', AC = b, BD = b', BC = a, AD = a'$. Tính góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

LỜI GIẢI



Có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}\right) = -\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$$= -\frac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2} + \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2}$$

$$= -\frac{a^2 + b'^2 - c'^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}$$

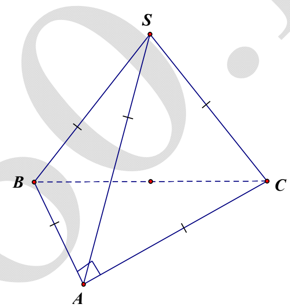
$$= \frac{c^2 - b^2 - b'^2 + c'^2}{2}.$$

Có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = BC.DA.\cos\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}\right)$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}\right) = \frac{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}}{BC.DA} = \frac{c^2 - b^2 - b'^2 + c'^2}{2a.a'}.$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

LỜI GIẢI



Có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

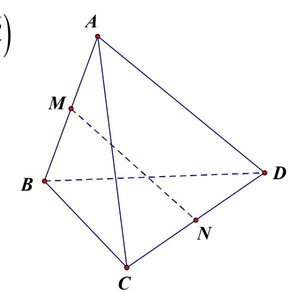
$$= -\frac{AB^2 + SA^2 - SB^2}{2} + \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

Ngoài ra có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC}}{AB.SC} = \dfrac{-\dfrac{a^2}{2}}{a.a} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SC}\right) = 120^0$.

Câu 3: Cho tứ diện có tất cả các cạnh bằng m. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.
a). Tính độ dài MN.
b). Tính góc giữa đường thẳng MN với các đường thẳng BC, AB và CD.

LỜI GIẢI



a). $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{4}\left(AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\right)$

Mà $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$

$$= -BA.BC.\cos\widehat{ABC} + BD.BC\cos\widehat{CBD}$$

$$= -m.m.\cos 60^0 + m.m.\cos 60^0 = 0$$

Vậy $MN^2 = \dfrac{m^2}{2} \Rightarrow MN = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$.

b). Có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(AB.AD.\cos 60^0 - BC.BA\cos 60^0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2}\right) = 0$$

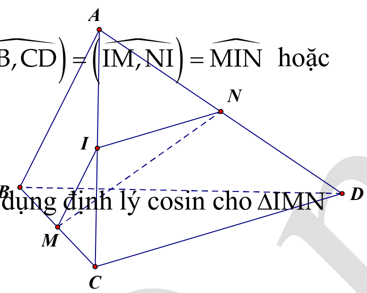
Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và AB bằng 90^0.

Có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)=\frac{m^2}{2}$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\frac{m^2}{2}}{\frac{m\sqrt{2}}{2}.m}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}\right)=45^0$. Vậy góc giữa hai đường thẳng MN và BC bằng 45^0.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Biết $AB=CD=a$ và $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

LỜI GIẢI



Gọi I trung điểm của AC. Có $\begin{cases}IM\parallel AB\\ IN\parallel CD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(\widehat{IM,NI}\right)=\widehat{MIN}$ hoặc $\left(180^0-\widehat{MIN}\right)$.

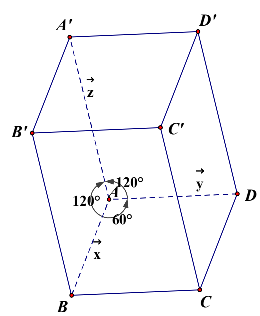
Trong ΔIMN có $IM=IN=\frac{a}{2}$, $MN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Áp dụng định lý cosin cho ΔIMN :

$$\cos\widehat{MIN}=\frac{IM^2+IN^2-MN^2}{2.IM.IN}=\frac{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a^2}{4}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{MIN}=120^0$$

Vậy $\left(\widehat{AB,CD}\right)=\left(180^0-\widehat{MIN}\right)=60^0$.

Câu 5: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ có tất cả các cạnh đều bằng a, $\widehat{BAD}=60^0$, $\widehat{BAA'}=\widehat{DAA'}=120^0$.
a). Tính góc giữa các cặp đường thẳng AB và A’D, AC’ với B’D.
b). Tính diện tích các hình A’B’CD và ACC’A’.
c). Tính góc giữa đường thẳng AC’ và các đường thẳng AB, AD, AA’.

LỜI GIẢI



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{x}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{y}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{z}$.

Có $\begin{cases}\vec{x}^2=a^2,\ \vec{y}^2=a^2,\ \vec{z}^2=a^2\\ \vec{x}.\vec{y}=\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|\cos 60^0=a.a.\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}\\ \vec{y}.\vec{z}=\left|\vec{y}\right|.\left|\vec{z}\right|\cos 120^0=a.a.(-\frac{1}{2})=-\frac{a^2}{2}\\ \vec{x}.\vec{z}=\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{z}\right|\cos 120^0=a.a.(-\frac{1}{2})=-\frac{a^2}{2}\end{cases}$

a).

- Trong $\Delta ADA'$ có $A'D=\sqrt{AA'^2+AD^2-2AA'.AD.\cos 120^0}=a\sqrt{3}$

  Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\vec{x}\left(\vec{y}-\vec{z}\right)=\vec{x}.\vec{y}-\vec{x}.\vec{z}=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2$.

  Vậy $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'D}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{A'D}\right|}=\frac{a^2}{a.a\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}>0\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D}}\right)=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và A’D bằng $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Ta có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D}=\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{B'C'}\right)\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{B'C'}\right)\left(\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{C'C}\right)=\left(\vec{x}+\vec{z}+\vec{y}\right)\left(\vec{y}-\vec{x}-\vec{z}\right)$$

$$=\vec{x}.\vec{y}-\vec{x}^2-\vec{x}.\vec{z}+\vec{y}\vec{z}-\vec{x}\vec{z}-\vec{z}^2+\vec{y}^2-\vec{x}.\vec{y}-\vec{y}\vec{z}$$

$$=\frac{a^2}{2}-a^2+\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}-a^2+a^2-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0\Rightarrow \overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{B'D}=0.$$

Vậy góc giữa AC’ và B’D bằng 90^0.

b).

- Có $AB \parallel A'B' \Rightarrow \cos\left(\widehat{AB, A'D}\right)=\cos\left(\widehat{A'B', A'D}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sin\left(\widehat{A'B', A'D}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

  $S_{A'B'CD}=2S_{\Delta DA'B'}=A'D.A'B'.\sin\left(\widehat{A'B', A'D}\right)=a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3}=a^2\sqrt{2}$.

- Có $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\vec{z}\left(\vec{x}+\vec{y}\right)=\vec{x}.\vec{z}+\vec{y}.\vec{z}=-a^2$.

  $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-a^2}{a.a\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

  $S_{ACC'A'}=2S_{\Delta ACA'}=AC.AA'.\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AC}}\right)=a\sqrt{3}.a.\frac{\sqrt{6}}{3}=a^2\sqrt{2}$.

c).

- Có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\left(\vec{z}+\vec{x}+\vec{y}\right)\vec{x}=\vec{x}.\vec{z}+\vec{x}^2+\vec{x}\vec{y}=a^2$

  Vậy $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}}\right)=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{a^2}{a\sqrt{3}.a}=\frac{1}{\sqrt{3}}>0\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB}}\right)=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  Vậy góc giữa hai đường thẳng AC’ và AB bằng $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  Có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}=\left(\vec{z}+\vec{x}+\vec{y}\right)\vec{y}=\vec{y}.\vec{z}+\vec{y}^2+\vec{x}\vec{y}=a^2$

  Vậy $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}}\right)=\frac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}=\frac{a^2}{a\sqrt{3}.a}=\frac{1}{\sqrt{3}}>0\Rightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AD}}\right)=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  Vậy góc giữa hai đường thẳng AC’ và AD bằng $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

  Có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{AA'}=\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AA}=\left(\vec{z}+\vec{x}+\vec{y}\right)\vec{z}=\vec{z}^2+\vec{x}\vec{z}+\vec{z}\vec{y}=0\Rightarrow$ Hai đường thẳng AC’ và AA’ vuông góc với nhau. Suy ra góc giữa chúng bằng 90^0.

Câu 6: Cho tứ diện ABCD, biết $AB\perp AC, AB\perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng AB và CD vuông góc với nhau.

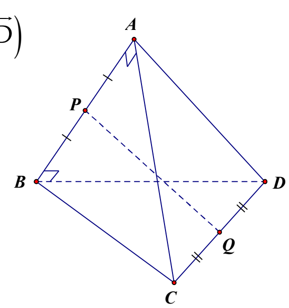
LỜI GIẢI

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{0}+\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}_{0}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\left[\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}_{0}+\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}}_{0}\right)=0\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{PQ}$$

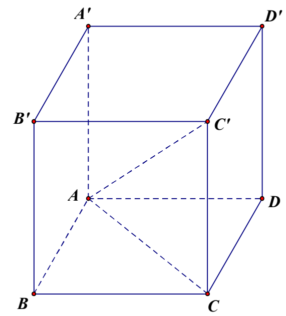


Câu 7: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh a.
a). Tính góc giữa AC và DA’.

b). Chứng minh rằng $BD \perp AC'$

LỜI GIẢI

a)



Có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'}\right)$

$= \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DD'}}_{0} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DD'}}_{0} = -a^2$

Ngoài ra $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'} = \left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{DA'}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}\right)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA'}}{AC.DA'} = \dfrac{-a^2}{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DA'}} = 120^0$

Vậy góc giữa AC và DA' là $180^0 - 120^0 = 60^0$

b) Có $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC'} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AA'}}_{0} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0} + \overrightarrow{AD}^2$

$= -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 = -a^2 + a^2 = 0$

Chứng tỏ BD vuông góc với AC'.