Đặt $x + 7 = y \Rightarrow C = (y + 1)^4 + (y - 1)^4 = y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 + y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1$

$= 2y^4 + 12y^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x = -7$

b) $D = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9 = (x^4 - 6x^3 + 9x^2) + (x^2 - 6x + 9)$

$= (x^2 - 3x)^2 + (x - 3)^2 \geq 0 \Rightarrow \min D = 0 \Leftrightarrow x = 3$

IV. Dạng phân thức:

1. Phân thức có tử là hằng số, mẫu là tam thức bậc hai

Biểu thức dạng này đạt GTNN khi mẫu đạt GTLN

Ví dụ : Tìm GTNN của $A = \dfrac{2}{6x - 5 - 9x^2} = \dfrac{-2}{9x^2 - 6x + 5} = \dfrac{-2}{(3x - 1)^2 + 4}$

Vì $(3x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{(3x - 1)^2 + 4} \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{-2}{(3x - 1)^2 + 4} \geq \dfrac{-2}{4} \Rightarrow A \geq -\dfrac{1}{2}$

$\min A = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$

2. Phân thức có mẫu là bình phương của một nhị thức

a) Ví dụ 1: Tìm GTNN của $A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

+) Cách 1: Tách tử thành các nhóm có nhân tử chung với mẫu

$A = \dfrac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{3(x^2 - 2x + 1) - 2(x - 1) + 1}{(x - 1)^2} = 3 - \dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}$. Đặt $y = \dfrac{1}{x - 1}$ Thì

$A = 3 - 2y + y^2 = (y - 1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x - 1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$

+) Cách 2: Viết biểu thức A thành tổng của một số với một phân thức không âm

$A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} = 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$

$\Rightarrow \min A = 2 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) Ví dụ 2: Tìm GTLN của $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100}$

Ta có $B = \frac{x}{x^2 + 20x + 100} = \frac{x}{(x + 10)^2}$. Đặt $y = \frac{1}{x + 10} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 10$ thì

$B = (\frac{1}{y} - 10).y^2 = -10y^2 + y = -10(y^2 - 2.y.\frac{1}{20}y + \frac{1}{400}) + \frac{1}{40} = -10\left(y - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{40}$

$\leq \frac{1}{40}$

$\text{Max } B = \frac{1}{40} \Leftrightarrow y - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{10} \Leftrightarrow x = 10$

c) Ví dụ 3: Tìm GTNN của $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$

Ta có: $C = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{\frac{1}{2}\left[(x + y)^2 + (x - y)^2\right]}{(x + y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{(x - y)^2}{(x + y)^2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$x = y$

3. Các phân thức có dạng khác

a)Ví dụ : Tìm GTNN, GTLN (Cực trị) của $A = \frac{3 - 4x}{x^2 + 1}$

Ta có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2 - 4x + 4) - (x^2+1)}{x^2+1} = \frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 1 \geq -1 \Rightarrow \min A = -1 \Leftrightarrow x = 2$

Ta lại có: $A = \frac{3 - 4x}{x^2+1} = \frac{(4x^2+4) - (4x^2 + 4x + 1)}{x^2+1} = 4 - \frac{(2x+1)^2}{x^2+1} \leq 4 \Rightarrow \max A = 4 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

C. Tìm GTNN, GTLN của một biểu thức biết quan hệ giữa các biến

1) Ví dụ 1: Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của $A = x^3 + y^3 + xy$

Ta có $A = (x + y)(x^2 - xy + y^2) + xy = x^2 + y^2$ (vì $x + y = 1$)

a) Cách 1: Biểu thị ẩn này qua ẩn kia, rồi đưa về một tam thức bậc hai

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - y$

nên $A = (1 - y)^2 + y^2 = 2(y^2 - y) + 1 = 2(y^2 - 2.y.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Vậy $\min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

b) Cách 2: Sử dụng đk đã cho, làm xuất hiện một biểu thức mới có chứa A

Từ $x + y = 1 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 1$(1). Mặt khác $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) với (2) vế theo vế, ta có:

$2(x^2 + y^2) \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \min A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$

2)Ví dụ 2: Cho $x + y + z = 3$

a) Tìm GTNN của $A = x^2 + y^2 + z^2$

b) Tìm GTLN của $B = xy + yz + xz$

Từ Cho $x + y + z = 3 \Rightarrow$ Cho $(x + y + z)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = 9$ (1)

Ta có $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ (2)

Đẳng thức xẩy ra khi $x = y = z$

a) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \Rightarrow \min A = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

b) Từ (1) và (2) suy ra

$9 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) \geq xy + yz + zx + 2(xy + yz + xz) = 3(xy + yz + zx)$

$\Rightarrow xy + yz + zx \leq 3 \Rightarrow \max B = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$

3) Ví dụ 3:

Tìm giá trị lớn nhất của $S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x)$ với $x,y,z > 0$ và $x + y + z = 1$

Vì $x,y,z > 0$,áp dụng BĐT Côsi ta có: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$