d) $N = \frac{S_2+S_3}{S_1}.\frac{S_1+S_3}{S_2}.\frac{S_1+S_2}{S_3} = \frac{(S_2+S_3)(S_1+S_3)(S_1+S_2)}{S_1.S_2.S_3}$

$\Rightarrow N^2 = \frac{(S_2+S_3)^2(S_1+S_3)^2(S_1+S_2)^2}{(S_1.S_2.S_3)^2} \geq \frac{4S_1S_2.4S_2S_3.4S_1S_3}{(S_1.S_2.S_3)^2} \geq 64 \Rightarrow N \geq 8$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC

Bài 4:

Cho tam giác đều ABC, các đường caoAD, BE, CF; gọi A', B', C' là hình chiếu của M

(nằm bên trong tam giác ABC) trên AD, BE, CF. Chứng minh rằng: Khi M thay đổi vị trí trong tam giác ABC thì:

a) A'D + B'E + C'F không đổi

b) AA' + BB' + CC' không đổi

Giải

Gọi h = AH là chiều cao của tam giác ABC thì h không đổi

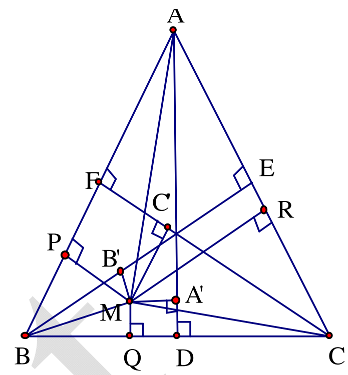
Gọi khoảng cách từ M đến các cạnh AB; BC; CA là MP; MQ; MR thì A'D + B'E + C'F = MQ + MR + MP

Vì M nằm trong tam giác ABC nên

$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{BMA} = S_{ABC}$

$\Leftrightarrow$ BC.(MQ + MR + MP) = BC . AH

$\Rightarrow$ MQ + MR + MP = AH $\Rightarrow$ A'D + B'E + C'F = AH = h



Vậy: A'D + B'E + C'F = AH = h không đổi

b) AA' + BB' + CC' = (AH – A'D)+(BE – B'E) (CF – C'F)

= (AH + BE + CF) – (A'D + B'E + C'F) = 3h – h = 2h không đổi

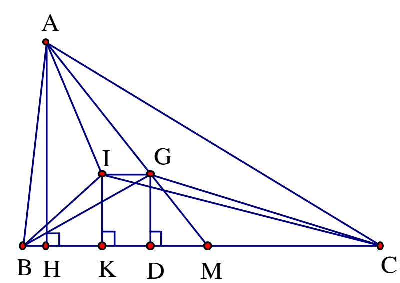
Bài 5:

Cho tam giác ABC có BC bằng trung bình cộng của AC và AB; Gọi I là giao điểm của các phân giác, G là trọng tâm của tam giác. Chứng minh: IG // BC

Giải

Gọi khoảng cách từ a, I, G đến BC lần lượt là AH, IK, GD

Vì I là giap điểm của ba đường phân giác nên khoảng cách từ I đến ba cạnh AB, BC, CA bằng nhau và bằng IK



Vì I nằm trong tam giác ABC nên:

$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA} \Leftrightarrow$ BC.AH = IK(AB+BC+CA) (1)

Mà $BC = \dfrac{AB + CA}{2} \Rightarrow AB + CA = 2\,BC$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có: BC. AH = IK. 3BC $\Rightarrow IK = \dfrac{1}{3}AH$ (a)

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$S_{BGC} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \Leftrightarrow BC\,.\,GD = \dfrac{1}{3} BC.\,AH \Rightarrow GD = \dfrac{1}{3}\,AH$ (b)

Từ (a) và (b) suy ra IK = GD hay khoảng cách từ I, G đến BC bằng nhau nên IG // BC

Bài tập về nhà:

1) Cho C là điểm thuộc tia phân giác của $\widehat{xOy} = 60^0$, Mlà điểm bất kỳ nằm trên đường vuông góc với OC tại C và thuộc miền trong của $\widehat{xOy}$, gọi MA, MB thứ tự là khoảng cách từ M đến Ox, Oy. Tính độ dài OC theo MA, MB

2) Cho M là điểm nằm trong tam giác đều ABC. A', B', C' là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AC, AB. Các đường thẳng vuông góc với BC tại C, vuông góc với CA tại A , vuông góc với AB tại B cắt nhau ở D, E, F. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DEF là tam giác đều

b) AB' + BC' + CA' không phụ thuộc vị trí của M trong tam giác ABC