Ví dụ 2: Tìm $x; y \in Z$ thoả mãn: $2y^2x + x + y + 1 = x^2 + 2y^2 + x.y$

$(2) \Rightarrow 2y^2.(x-1) - x.(x-1) - y.(x-1) + 1 = 0(*)$

Với: $x = 1; (*) \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ không phải là ngiệm của phương trình. Nên:

$$2y^2 - x - y + \frac{1}{x-1} = 0(**).$$

Phương trình có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x-1) \in U(1) = \{1;-1\} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

Ví dụ 3: Tìm $x; y \in Z^+$ thoả mãn: $3^x + 1 = (y+1)^2$ (3)

Ta có:

$(3) \Rightarrow 3^x = (y-1)^2 - 1 = y(y+2).3^x$ là số lẻ $\Rightarrow y;(y+2)$ là hai số lẻ liên tiếp $\Rightarrow (y; y+2) = 1 \Rightarrow y; y+2$ là các luỹ thừa của 3, nên:

$$\begin{cases} y = 3^m \, (*) \\ y + 2 = 3^n \, (**) \end{cases} (m + n = x) \Rightarrow 3^m + 2 = 3^n \Rightarrow m < n$$

- Với: $m = 0; \Rightarrow n = 1 \Rightarrow y = 1; x = 1$.
- Với: $m \geq 1; \Rightarrow n > 1$ Từ $(*);(**) \Rightarrow \begin{cases} y \vdots 3 \\ (y+2) \vdots 3 \end{cases} \Rightarrow (y;(y+2)) \neq 1$ (vô lí)

Phương trình có nghiệm nguyên: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

✵ - ***PHƯƠNG PHÁP 4***: Phương pháp sử dụng bất đẳng thức

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình mà hai vế là những đa thức có tính biến thiên khác nhau.*

- Áp dụng các bất đẳng thức thường gặp:

*Bất đẳng thức Cô – si:

Cho n số không âm: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$. Khi đó:

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+......+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.......a_n}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=......=a_n$

* Bất đẳng thức Bunhiacôpxki:

Cho 2n số thực: $a_1;a_2;a_3;......;a_n$ và $b_1;b_2;b_3;......;b_n$. Khi đó:

$$\left(a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+....+a_n.b_n\right)^2 \le \left(a_1.+a_2.+a_3+....+a_n\right)\left(b_1+b_2.+b_3+....+b_n\right).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_i=kb_i\left(i=\overline{1;n}\right)$.

*Bất đẳng thứcgiá trị tuyết đối:

$$|a|+|b|=\left[\begin{array}{l}|a+b| \Leftrightarrow a.b\ge 0\\ |a-b| \Leftrightarrow a.b<0\end{array}\right.$$

❁**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y\in Z^+$ thoả: $\dfrac{x.y}{z}+\dfrac{y.z}{x}+\dfrac{z.x}{y}=3$ (1)

Áp dụng BĐT Cô – si. Ta có: $3=\dfrac{x.y}{z}+\dfrac{y.z}{x}+\dfrac{z.x}{y}\ge 3.\sqrt[3]{\dfrac{x.y}{z}.\dfrac{y.z}{x}.\dfrac{z.x}{y}}=3.\sqrt[3]{x.y.z}$.

$\Rightarrow \sqrt[3]{x.y.z} \le 1 \Leftrightarrow x.y.z \le 1 \Rightarrow x = y = z = 1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = y = z = 1$

Ví dụ 2: Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $(x+y+1)^2 = 3(x^2+y^2+1)$ (2)

(*Toán Tuổi thơ 2*)

Theo Bunhiacôpxki,ta có:

$(x+y+1)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+1) = 3(x^2+y^2+1)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow x = y = 1$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = y = 1$

Ví dụ 3: Tìm tất cả các số nguyên x thoả mãn:

$$|x-3|+|x-10|+|x+101|+|x+990|+|x+1000| = 2004 \quad (3)$$

- *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta nhận thấy: 2104 = 3 + 10 + 101 + 990 + 1000 =101 + 2003 và $|a| = |-a|$

Ta có:(3)$\Rightarrow |3-x|+|10-x|+|x+101|+|x+990|+|x+1000| = 2004$.

Mà $|a| \ge a \Rightarrow \begin{cases} |3-x| \ge 3-x \\ |10-x| \ge 10-x \\ |x+101| \ge x+101 \\ |x+990| \ge x+990 \\ |x+1000| \ge x+1000 \end{cases} \Rightarrow 2004 \ge |x+101| + 2003 \Rightarrow |x+101| \le 1$

Do đó: $-1\le(x+101)\le1\Rightarrow(x+101)\in\{-1;0;1\}\Rightarrow x\in\{-102;-101;-100\}$.

Với $x=-101\Rightarrow 2004=2003$ (vô lí). Vậy nghiệm của phương trình là: $x\in\{-102;-100\}$

1) Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn: $x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le0\Leftrightarrow\left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le0$$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2\le0$ (*) Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2\ge0$ $\forall x,y\in R$

$\Rightarrow\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+(z-1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x-\frac{y}{2}=0\\ \frac{y}{2}-1=0\\ z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$ Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=1\end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP 5: Phương pháp lựa chọn

Phương pháp: *Phương pháp này được sử dụng với các phương trình mà ta có thể nhẩm (*phát hiện dể dàng*) được một vài giá trị nghiệm*