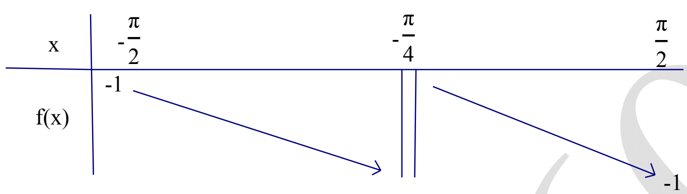
Ví dụ 3. Xét tính tăng giảm của hàm số lượng giác $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

vì hàm $y=\frac{\pi}{4}-x$ nghịch biến trên R và hàm số $y=\tan u$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Do đó hàm số $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lại có khi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ và trong khoảng này hàm số không xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số như sau :

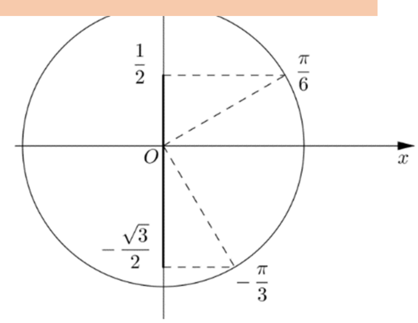


Ví dụ 4. Hàm số nào đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$:

A. $y=\cos x$. **B.** $y=\cot 2x$. **C.** $y=\sin x$. **D.** $y=\cos 2x$

.

Lời giải



Chọn C

Quan sát trên đường tròn lượng giác,

ta thấy trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right)$ hàm $y=\sin x$ tăng dần

(tăng từ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ đến $\frac{1}{2}$).

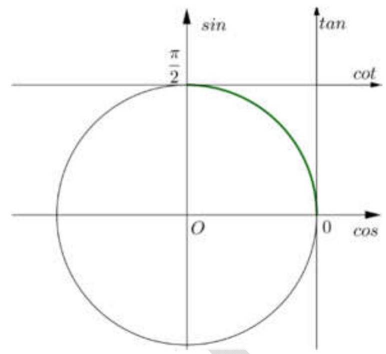
Ví dụ 5. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $y=\sin x$ tăng trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

B. Hàm số $y=\cot x$ giảm trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y=\tan x$ tăng trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

D. Hàm số $y=\cos x$ tăng trong khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.



Lời giải

Chọn D

Quan sát trên đường tròn lượng giác,

trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta thấy: $y=\cos x$ **giảm** dần.

Ví dụ 6. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

B. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

C. Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

D. Hàm số $y=\cos x$ đồng biến trong khoảng $\left(-\dfrac{3\pi}{4};-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Do hàm số $y=\cos x$ đồng biến trên $(-\pi+k2\pi;\,k2\pi)$, cho $k=0\Rightarrow(-\pi;0)$ suy ra đồng biến trên $\left(-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 7. Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên:

A. Khoảng $(0;\pi)$.

B. Các khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

C. Các khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\pi+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

D. Khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

Mà $\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)\subset\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ với mỗi $k\in\mathbb{Z}$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}+k2\pi;\frac{\pi}{4}+k2\pi\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Dạng 3: Tính chẵn - lẻ của HSLG

Ví dụ 1: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a. $y=f(x)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)$ b. $y=f(x)=\tan x+\cot x$

Lời giải

a. Tập xác định $D=\mathbb{R}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có $f(x)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+4\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

Có $f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

b. Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq l\pi \end{cases}$ (với $k, l \in \mathbb{Z}$).

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, l\pi \middle| k, l \in \mathbb{Z} \right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$

Ta có $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 2: Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan^7 2x.\sin 5x$

Lời giải

Hàm số có nghĩa khi $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f(-x) = \tan^7(-2x).\sin(-5x) = \tan^7 2x.\sin 5x = f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ là hàm số chẵn.

Dạng 4: Tính tuần hoàn, tìm chu kỳ của HSLG

Ví dụ 1: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos^2 x - 1$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y=\cos^2 x-1=\frac{1+\cos 2x}{2}-1=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kì $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

Ví dụ 2: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right).\cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Lời giải

Ta biến đổi: $y=\sin\left(\frac{2}{5}x\right).\cos\left(\frac{2}{5}x\right)=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{5}x\right)$.

Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kì $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\left(\frac{4}{5}\right)}=\frac{5\pi}{2}$.

Ví dụ 3: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y=\cos x+\cos\left(\sqrt{3}.x\right)$

Lời giải

Giả sử hàm số đã cho tuần hoàn $\Rightarrow$ có số thực dương T thỏa :

$f(x+\mathrm{T})=f(x)\Leftrightarrow\cos(x+\mathrm{T})+\cos\sqrt{3}(x+\mathrm{T})=\cos x+\cos\sqrt{3}x$

$x=0\Rightarrow\cos\mathrm{T}+\cos\sqrt{3}\mathrm{T}=2\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\mathrm{T}=1\\ \cos\sqrt{3}\mathrm{T}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{T}=2n\pi\\ \sqrt{3}\mathrm{T}=2m\pi\end{cases}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{m}{n}$ vô lí, do

$m,n\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{m}{n}$ là số hữu tỉ. Vậy hàm số đã cho không tuần hoàn.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó: $y=\frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi,k\in\mathbb{Z}\}$.

Ta xét đẳng thức $f\left(x+\mathrm{T}\right)=f\left(x\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sin\left(x+\mathrm{T}\right)}=\dfrac{1}{\sin x}\Leftrightarrow\sin\left(x+\mathrm{T}\right)=\sin x.$

Chọn $x=\dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin x=1$ và do đó $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{T}\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{T}=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\,k\in\mathbb{Z}.$

Số dương nhỏ nhất trong các số T là 2π .

Rõ ràng $\forall x\in\mathrm{D},x+k2\pi\in\mathrm{D},x+k2\pi\in\mathrm{D}$ và $f\left(x+k2\pi\right)=\dfrac{1}{\sin\left(x+k2\pi\right)}=\dfrac{1}{\sin x}=f\left(x\right)$

Vậy f là hàm số tần hoàn với chu kì $\mathrm{T}=2\pi$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c,d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=a\sin cx+b\cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\dfrac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Lời giải

* Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn $\Rightarrow\exists T>0: f(x+T)=f(x)\ \ \forall x$

Cho $x=0,x=-T\Rightarrow\begin{cases}a\sin cT+b\cos dT=b\\-a\sin cT+b\cos dT=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos dT=1\\\sin cT=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}dT=2n\pi\\cT=m\pi\end{cases}\Rightarrow\dfrac{c}{d}=\dfrac{m}{2n}\in\mathbb{Q}.$

* Giả sử $\dfrac{c}{d}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists k,l\in\mathbb{Z}:\ \dfrac{c}{d}=\dfrac{k}{l}$. Đặt $T=\dfrac{2\pi k}{c}=\dfrac{2l\pi}{d}$

Ta có: $f(x+T)=f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\dfrac{2\pi k}{c}=\dfrac{2l\pi}{d}$.