Ngoài ra ta có $AB \perp (SAD)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5 , thì góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc giữa hai đường thẳng AI và AB chính là góc $\widehat{BAI}$.

Ta có $\widehat{BAI} = \widehat{BSA}$ (vì cùng phụ với góc $\widehat{SAI}$).

Có $\tan \widehat{BSA} = \dfrac{AB}{AS} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^0$.

Kết luận $\left((SBC),(SAD)\right) = \widehat{BAI} = 30^0$.

e). Góc giữa (SBD) và (ABCD)

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$. Hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) có giao tuyến BD , hai đường thẳng AO và SO lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa AO và SO chính là góc $\widehat{SOA}$. Ta có

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{AO}{SO} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \widehat{SOA} = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \left[(SBD),(ABCD)\right] = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right).$$

f). Góc giữa (SBD) và (SAB)

Vì $(SAC) \perp (SBD)$ theo giao tuyến SO .

Dựng $AJ \perp SO\,(J \in SO) \qquad \Rightarrow AJ \perp (SBD)$.

Có $AJ \perp (SBD), AD \perp (SAB) \Rightarrow \left((SBD),(SAB)\right) = (AJ, AD) = \widehat{DAJ}$.

Có $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{7}{3a^2} \Rightarrow AJ = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $AJ \perp (SBD) \Rightarrow AJ \perp JD\,(JD \subset (SBD)) \Rightarrow \Delta AJD$ vuông tại J

nên $\cos \widehat{DAJ} = \dfrac{AJ}{AD} = \dfrac{\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \widehat{DAJ} = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

Kết luận $\left((SBD),(SAB)\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{21}}{7}\right)$.

g). Góc giữa (SBC) và (ABCD)

Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC và $AB \perp BC, SB \perp BC \Rightarrow \left[(SBC),(ABCD)\right] = (AB,SB) = SBA = 60^0$ (vì $BSA = 30^0$).

h). Góc giữa (SCD) và (ABCD)

Ta có $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CC và $AD \perp CD, SD \perp CD \Rightarrow \left[(SCD),(ABCD)\right] = (AD,SD) = SDA = 60^0$ (vì $DSA = 30^0$).

i). Góc giữa (SBD) và (SBC)

Ta có $AI \perp (SBC), AJ \perp (SBD) \Rightarrow \left[(SBC),(SBD)\right] = (AI,AJ) = JAI$.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAB và SAO có

$SA^2 = SI.SB \Rightarrow SI = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}$,

$SA^2 = SJ.SO \Rightarrow SI = \frac{SA^2}{SO} = \frac{SA^2}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{3a\sqrt{14}}{7}$.

$AI.SB = AS.AB \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong ΔSBO vuông tại O có $\cos BSO = \frac{SO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{14}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{14}}{4}$.

Trong ΔSJI có

$IJ^2 = SI^2 + SJ^2 - 2.SI.SJ.\cos BSO = \frac{9a^2}{4} + \frac{18a^2}{7} - 2.\frac{3a}{2}.\frac{3a\sqrt{14}}{7}.\frac{\sqrt{14}}{4} = \frac{9a^2}{28}$

Trong ΔAIJ có

$$\cos IAJ = \frac{AI^2 + AJ^2 - IJ^2}{2.AI.AJ} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{7} - \frac{9a^2}{28}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{21}}{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow IAJ = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right).$$

Kết luận $\left[(SBC),(SBD)\right] = JAI = \arccos\left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)$.

k). Góc giữa (SBC) và (SCD)

Ta có $\Delta SBC = \Delta SDC$ cạnh huyền cạnh góc vuông, dựng $BK \perp SC\left(K \in SC\right) \Rightarrow DK \perp SC$ và $DK = BK$. Hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) có SC cạnh chung nên $\left[\left(SBC\right),\left(SCD\right)\right] = \left(BK, DK\right) = BKD$ hoặc $180^0 - BKD$.

Xét ΔSBC vuông tại B có

$$BK.SC = BS.BC \Rightarrow BK = \frac{BS.BC}{SC} = \frac{BS.BC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{3a^2 + 2a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Trong ΔBDK có

$$\cos BKD = \frac{BK^2 + DK^2 - BD^2}{2.BK.DK} = \frac{\frac{4a^2}{5} + \frac{4a^2}{5} - 2a^2}{2.\frac{4a^2}{5}} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow BKD = \arccos\frac{1}{4}$$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB = a, BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và SA = a . Tính góc giữa các mặt phẳng sau :

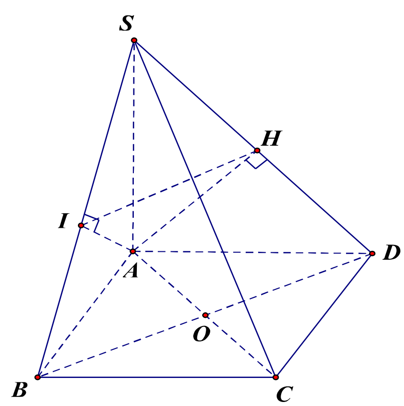
a). Góc giữa mặt phẳng bên và mặt phẳng đáy

b). Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

LỜI GIẢI

a). Góc giữa các mặt bên và mặt đáy :



- Ta có

$$SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow \begin{cases} mp\left(SAB\right) \perp mp\left(ABCD\right) \\ mp\left(SAD\right) \perp mp\left(ABCD\right) \end{cases}$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SAD) với mặt phẳng (ABCD) bằng 90^0.

- $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc) .Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC nên góc của chúng là góc giữa SB và AB là góc SBA.

Trong ΔSAB có : $\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow SBA = 45^0 \Rightarrow \left[\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right] = 45^0$.

- $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp SD$ (định lý ba đường vuông góc) .Hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) có giao tuyến CD nên góc của chúng là góc giữa SD và AD là góc SDA.

Trong ΔSAD có:

$$\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow SDA = \arctan\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\left(SCD\right),\left(ABCD\right)\right] = \arctan\frac{1}{2}.$$

b). Góc giữa hai mặt bên liên tiếp .

Góc giữa (SAB) và (SBC)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)(BC \subset (SBC))$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0 .

Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)(CD \subset (SCD))$. Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0 .

Góc giữa (SBC) và (SCD)

Dựng $AI \perp SB \Rightarrow AI \perp (SBC)$, dựng $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa AIvà AH chính là góc IAH hoặc 180^0 - IAH.

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông SAB và SAD có

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$.

$AI.SB = AB.AS \Rightarrow AI = \dfrac{a.a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $AH.SD = AD.AS \Rightarrow AH = \dfrac{2a.a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

$SI = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $SH = \dfrac{SA^2}{SD} = \dfrac{a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng hàm số cos cho hai tam giác BSD và ISH có chung góc S

$$\cos S = \frac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \frac{2a^2 + 5a^2 - 5a^2}{2.a\sqrt{2}.a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos S = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{5} - 2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{a}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{a^2}{2}.$$

$$\cos IAH = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{4a^2}{5} - \frac{a^2}{2}}{2.\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{2a}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow IAH = \arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right).$$

Kết luận $\left((SBC),(SCD)\right) = IAH = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

c). Góc giữa hai mặt bên đối diện

Góc giữa (SAB) và (SCD)

Vì $AD \perp (SAB)$ và $AH \perp (SCD)$ nên góc giữa (SAB) và (SCD) là góc giữa AD và AH là góc nhọn DAH

Ta có $\tan DSA = \frac{AD}{AS} = \frac{2a}{a} = 2 \Rightarrow DSA = \arctan 2 \Rightarrow DAH = \arctan 2$ (vì hai góc DAH và DSA cùng phụ với góc SAH).

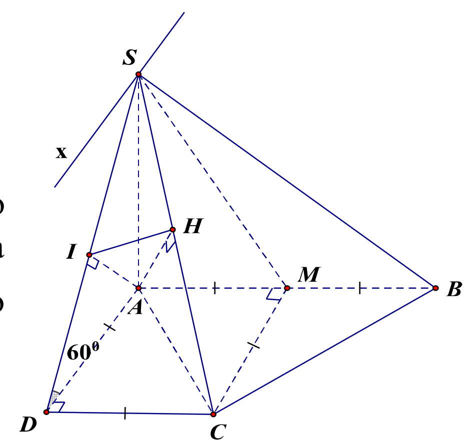
Tương tự ta tính được góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy (ABCD) là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, dựng $AH \perp SC (H \in SC)$, gọi M trung điểm AB. Góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD) bằng 60^0.

a). Tính góc giữa SD và (SAB) b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD) d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

LỜI GIẢI



Ta có

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$

Hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) có SD là giao tuyến nên góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa AD và SD chính là góc $SDA = 60^0$, nên có $SA = AD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a.$$

a). Tính góc giữa SD và (SAB)

Có $AD \perp (SAB)$ nên SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAB) . Nên góc giữa SD và (SAB) là góc DSA . Kết luận $(SD,(SAB)) = DSA = 30^0$ (cùng phụ với $SDA = 60^0$).

b). Góc giữa (SAD) và (SMC).

Hai mặt phẳng (SAD) và (SMC) có điểm chung là S và có AD // MC nên giao tuyến của chúng là Sx và song với AD và MC .

$$\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp AM, \text{ mà } CM \parallel Sx \Rightarrow AM \perp Sx \quad (1).$$

$SA \perp AD$, mà $AD \parallel Sx \Rightarrow SA \perp Sx$ (2) .

Từ (1) và (2) suy ra $((SAD),(SMC)) = (SA,SM) = MAS$.

Trong ΔMAS vuông tại A có $\tan MSA = \frac{AM}{AS} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow MSA = 30^0$.

c). Tính góc giữa (SBC) và (ABCD)

Trong tam giác ABC có CM là đường trung tuyến và $CM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$.

Hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) có giao tuyến BC, hai đường thẳng SC và AC lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC. Nên góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa SC và AC là góc SCA. Trong ΔSAC vuông tại A có

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{SA}{\sqrt{AB^2 + AM^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Kết luận $\left[(SBC),(ABCD)\right] = SCA = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

d). Tính góc giữa (SBC) và (SCD)

vì $BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$, hai mặt phẳng này vuông góc với nhau theo giao tuyến SC, dựng $AH \perp SC (H \in SC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$ (3)

Và có (SAD) và (SCD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SD, dựng $AI \perp SD (I \in SD) \Rightarrow AI \perp (SCD)$ (4).

Từ (3) và (4) thì $\left[(SBC),(SCD)\right] = (AI, AH) = IAH$

Hệ thức lượng trong các tam giác vuông SAD và SAC có

$$AI.SD = AS.AD \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ SA^2 = SI.SD \Rightarrow SI = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2}.$$

$$AH.SC = AC.AS \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{5};\ SH.SC = SA^2 \Rightarrow SH = \frac{3a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{3a}{\sqrt{5}}.$$

Ta có $\cos CSD = \frac{SD}{SC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý hàm cosin cho hai tam giác SIH và AIH có

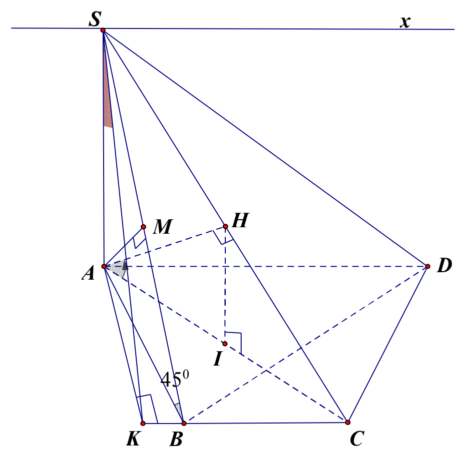
$$IH^2 = SI^2 + SH^2 - 2.SI.SH.\cos CSD = \frac{9a^2}{4} + \frac{9a^2}{5} - 2.\frac{3a}{2}.\frac{3a}{\sqrt{5}}.\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{9a^2}{20}.$$

$$\cos IAH = \frac{AI^2 + AH^2 - IH^2}{2.AI.AH} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{6a^2}{5} - \frac{9a^2}{20}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{30}}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4} \Rightarrow IAH = \arccos\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy, ABCD là hình thang đáy lớn AD, $AB = BC = DC = a$, $DA = 2a$. Vẽ $AH \perp SC$ và M là trung điểm SB. Góc giữa SB và mp(ABCD) là 45^0. Tính góc:

a). $\left(AM,(SBD)\right)$ b). $\left(AH,(ABCD)\right)$ c). $\left((SAD),(SBC)\right)$

LỜI GIẢI



a). Theo đề bài ABCD nữa lục giác đều , nên ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính AD , có $AC = BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} BD \perp AB \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp mp(SAB)$, vậy AB là hình chiếu của SB lên mp(ABCD) nên : $\left(SB,(ABCD)\right) = SBA = 45^0 \Rightarrow SA = AB = a$ (Vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Có $\begin{cases} AM \perp SB(gt) \\ AM \perp BD\left(BD \perp (SAB)\right) \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow \left(AM,(SBD)\right) = 90^0$.

b). Trong tam giác SAC dựng $HI \parallel SA, I \in AC \Rightarrow HI \perp mp(ABCD)$.

Vậy AI là hình chiếu của AH trên mp(ABCD), do đó $\left(AH,(ABCD)\right) = HAI = HAC$.

Trong ΔSAC vuông tại A : $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow SCA = 30^0$.

Trong ΔHAC: $HAC + HCA = 90^0 \Rightarrow HAC = 60^0$.

c). Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC), ta phải tìm giao tuyến của hai mặt phẳng này :

Có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBD) \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBD) = Sx\left(Sx \parallel AD \parallel BC\right)$ (1).

Kẻ $AK \perp BC$ tại K. Có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(SAK) \Rightarrow BC \perp SK$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} SA \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left[(SAD),(SBC)\right] = ASK$.

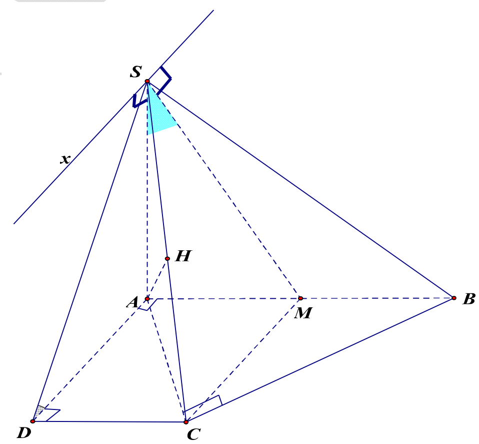
Trong ΔAKB vuông tại K : $AK = AB.\cos KAB = a.\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (vì $DAB = 60^0$)

Trong ΔSAK vuông tại A : $\tan ASK = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow ASK = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với đáy ABCD, đáy là hình thang vuông tại A, có đáy lớn AB, $AB = 2a, AD = DC = a$. Vẽ $AH \perp SC, H \in SC$ và M là trung điểm của AB. Góc giữa (SDC) và (ABC) là 60^0. Tính :

a). $\left(SD,(SAB)\right)$ b). $\left((SAD),(SMC)\right)$ c). chứng minh $BC \perp (SAC)$

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp mp(SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Có $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD \text{ , } SD \perp CD \\ AD \subset (ABCD), SD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left((SCD),(ABCD)\right) = SDA = 60^0$.

Trong ΔSAD có $SA = AD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp mp(SAB)$, suy ra SA là hình chiếu vuông góc của SD trên mp(SAB). Vậy $\left(SD,(SAB)\right) = DSA = 30^0$

b). Ta có $AD \parallel CM$ (dễ dàng chứng minh được). Tìm giao tuyến của mp(SAD) và mp(SCM): có $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCM) \\ AD \parallel CM \\ AD \subset (SAD), CM \subset (SCM) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SCM) = Sx\left(Sx \parallel AD \parallel CM\right)$

Ta có $DA \perp SA\left(DA \perp (SAB)\right) \Rightarrow SA \perp Sx$

$CM \perp (SAB)\left(\text{vì } CM \parallel AD\right) \Rightarrow SM \perp CM \Rightarrow SM \perp Sx$

Vậy $\left[(SAD),(SCM)\right] = (SA, SM) = ASM$.

Có $\tan ASM = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow ASM = 30^0$.

c). Ta có ACDM là hình vuông nên CM = a , trong tam giác ACB có CM là đường trung tuyến và bằng một nữa cạnh BC . Suy ra tam giác ACB vuông tại C .

Có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a, ΔABD đều, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$.

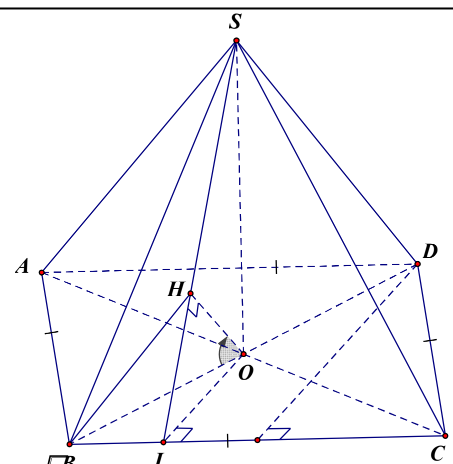
a). Chứng minh: $BD \perp (SAC)$.

b).Gọi I là hình chiếu của O trên BC. Chứng minh: $(SBC) \perp (SOI)$.

c). Tính góc giữa SI và $(ABCD)$.

d). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

b). Có $\begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI)$,

mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SOI) \perp (SBC)$.

c). Có OI là hình chiếu vuông góc của SI trên mp(ABCD). Do đó góc giữa SI và (ABCD) là góc SIO

Vì ABD là tam giác đều nên $BD = a$ và $AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔOBI vuông tại I có $OI = OB\sin 60^0 = \dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔSOI vuông tại O có $\tan SIO = \dfrac{SO}{OI} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SIO = \arctan\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

c). Theo chứng minh câu b) hai mặt phẳng (SOI) và (SBC) vuông góc với nhau theo giao tuyến SI, trong mp(SOI) dựng $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC)$

Có $\begin{cases} OB \perp (SAC) \\ OH \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow \left[(SAC),(SBC)\right] = \left(OB, OH\right) = BOH$.

Vì $OH \perp (SBC) \Rightarrow OH \perp HB \Rightarrow \Delta OHB$ vuông tại H.

Trong ΔSOI vuông tại O có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{16}{3a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{57}}{19}$

Trong ΔOHB vuông tại H có

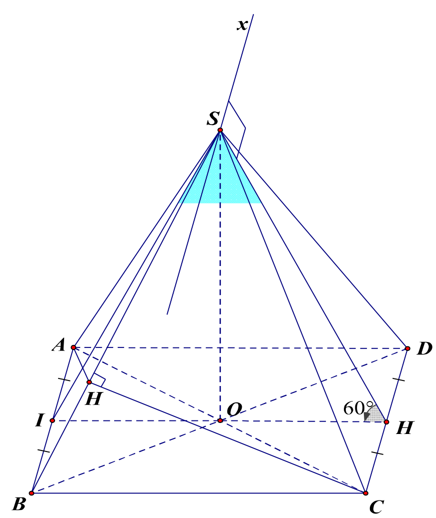
$$\cos BOH = \frac{OH}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{57}}{19}}{\frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{57}}{19} \Rightarrow BOH = \arccos\frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

Kết luận $\left[(SAC),(SBC)\right] = \arccos\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với mặt đáy góc 60^0. Tính góc giữa các mặt phẳng:

a). (SAB) và (SCD). b). (SAB) và (SBC).

LỜI GIẢI



a). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

Gọi O là tâm của đáy . Gọi H , I lần lượt trung điểm của CD , AB.

Ta có : $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ OH \perp CD, OH \subset (ABCD) \\ SH \perp CD, SH \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \left[(SCD),(ABCD)\right] = SHO = 60^0$.

Trong ΔSHO vuông tại O có

$$\tan SHO = \frac{SO}{OH} \Rightarrow SO = OH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

Ta có : $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx (Sx \parallel AB \parallel CD)$

$AB \perp SI \Rightarrow Sx \perp SI, CD \perp SH \Rightarrow Sx \perp SH$

Vậy góc $[(SAB),(SCD)] = ISH$. Vì ΔISH cân có góc $SHI = 60^0$ nên ΔISH đều nên $ISH = 60^0$

b). Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)

Vì S.ABCD là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau do đó $\Delta SAB = \Delta SCB (c.c.c)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) có giao tuyến SB . Hạ $AH \perp SB$ thì $CH \perp SB$. Vậy góc giữa $[(SAB),(SCB)] = AHC$.

Trong ΔSOB vuông tại O : $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Trong ΔSAB có : $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SI.AB = \frac{1}{2} AH.SB \Rightarrow AH = \frac{SI.AB}{SB} = \frac{a.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Ta có tam giác ACH cân tại H từ chứng minh trên , nên $AH = CH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác AHC :

$$\cos AHC = \frac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2AH.CH} = \frac{\frac{4a^2}{5} + \frac{4a^2}{5} - 2a^2}{2.\frac{4a^2}{5}} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow AHC = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh a nằm trong mp(P). Trên các đường thẳng vuông góc với (P) vẽ từ B và C lấy các đoạn $BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}, CE = a\sqrt{2}$ nằm cùng một bên đối với (P).

a). Chứng minh tam giác ADE vuông. Tính diện tích tam giác này.

b). Tính góc giữa hai mp(ADE) và (P).

LỜI GIẢI

Gọi F là trung điểm của CE có $FE = FC = \frac{CE}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác vuông ABD , ACE , DEF có :