Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB = 3a, AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM\ (0 < x < a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA, SB, SC lần lượt tại A', B', C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của các tam giác $BDA', B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a.Trên các cạnh $AB, CC', C'D'$ và AA' lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x(0 \le x \le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng và MP, NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD, SC, SB tại N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

Câu 10. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B', BB', BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

Câu 11. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N nằm trên AD', BD sao cho $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN \parallel A'C$.

Câu 12. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK) \parallel (BB'C'C)$ và $(A'KG) \parallel (AIB)$.

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

Câu 13. Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1, d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.
b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.
c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

Câu 14. Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB, AC, DC, DB lần lượt tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh MN, PQ, BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.
b) Đặt $AM = x, AN = y$. Chứng minh $a(x+y) = 3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM + AN$.
c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s = x + y$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD = CD = BC = a$, $AB = 2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?
b) So sánh AM và NP.

Lời giải:

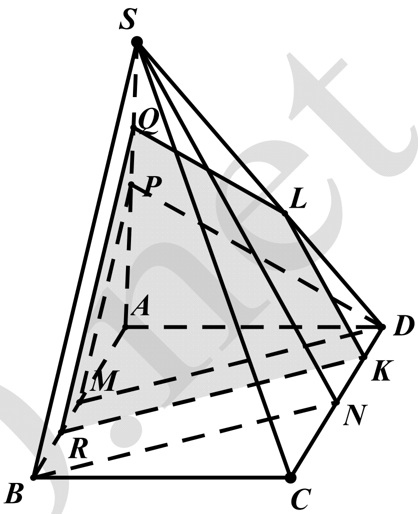
Câu 1. a) Ta có

$\begin{cases} BN \parallel DM \\ DM \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BN \parallel (DPM)\ (1)$ Tương tự

$\begin{cases} BS \parallel MP \\ MP \subset (DPM) \end{cases} \Rightarrow BS \parallel (DPM)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBN) \\ (\alpha) \parallel (SBN) \end{cases} \Rightarrow SB \parallel (\alpha)$.



vậy

$\begin{cases} Q \in (SAB) \cap (\alpha) \\ SB \subset (SAB) \\ SB \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = QR \parallel SB, R \in AB$

.

Tương tự

$(\alpha) \cap (ABCD) = RK \parallel BN, K \in CD$

$(\alpha) \cap (SCD) = KL \parallel SB, L \in SD$.

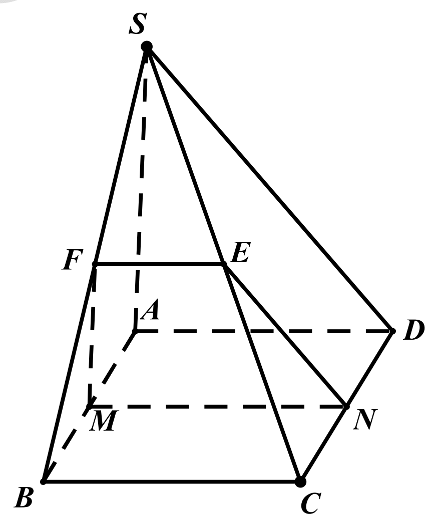
Vậy thiết diện là tứ giác $QRKL$.

c) Ta có $\begin{cases} M \in (\beta) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\beta) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow (\beta) \cap (SAB) = MF \parallel SA, F \in SB$

Tương tự $(\beta) \cap (SCD) = NE / /SD, E \in SC$.

Thiết diện là hình thang $MNEF$.



Câu 2. a) Do O, M lần lượt là trung điểm của AC, SA nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh $SC \Rightarrow OM \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$ (1).

Tương tự

$ON \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

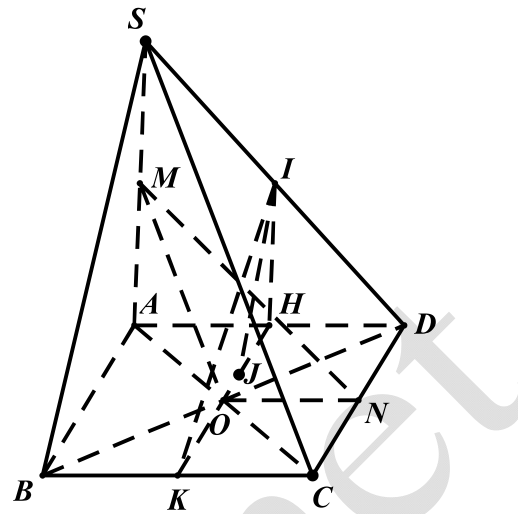
b) Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Do $J \subset (ABCD)$ và

$d(J, AB) = d(J, CD)$ nên

$J \in HK \Rightarrow IJ \subset (IHK)$.

Ta dễ dàng chứng minh được $(IHK) \parallel (SAB)$.

Vậy $\begin{cases} IJ \subset (IHK) \\ (IHK) \parallel (SAB) \end{cases} \Rightarrow IJ \parallel (SAB)$.



Câu 3. Kẻ $FI \parallel SA, I \in AB \Rightarrow IF \parallel (SAD)$.

Ta có $\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{IA}{IB}$ (1).

Theo tính chất đường phân giác ta có

$\dfrac{FS}{FB} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{AD}{AC}$ (2)

(Do các tam giác ASD, ABC cân tại A nên $SA = AD, AB = AC$)

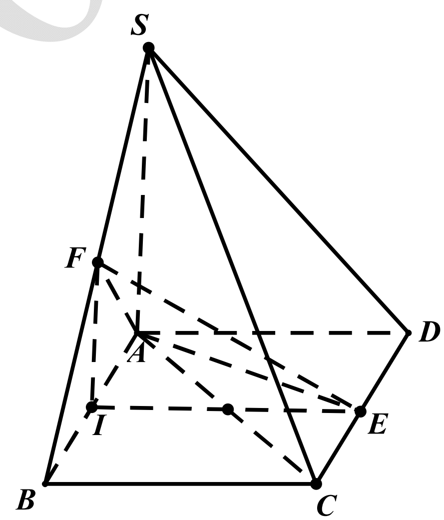
Mặt khác $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{AC}$ (3).

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{ED}{EC} \Rightarrow IE \parallel AD$.

Mà $AD \subset (SAD) \Rightarrow IE \parallel (SAD)$.

Ta có $\begin{cases} IE \parallel (SAD) \\ IF \parallel (SAD) \end{cases} \Rightarrow (IEF) \parallel (SAD)$.

Mà $EF \subset (IEF) \Rightarrow EF \parallel (SAD)$.



Câu 4.

a) Ta có $\begin{cases} BE \parallel AF \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow EB \parallel (ADF)$.

Tương tự $BC \parallel (ADF)$.

Từ đó ta có $(BCE)//(ADF)$.

b) Vì $MM' \parallel AB \Rightarrow MM' \parallel CD$ nên theo định lí Thales ta có

$\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AM'}{AD}$ (1).

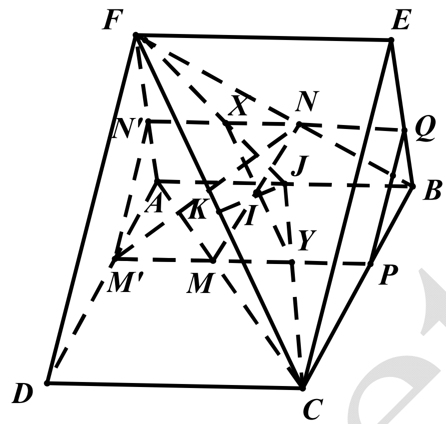
Tương tự $NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AN'}{AF}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$

$\Rightarrow M'N' \parallel DF \subset (DEF) \Rightarrow M'N' \parallel (DEF)$.

Lại có $MM'//CD \parallel EF \Rightarrow MM' \parallel (DEF)$

$\Rightarrow (DEF) \parallel (MNN'M')$.



c) Gọi $P = MM' \cap BC, Q = NN' \cap BE$ và J, K lần lượt là trung điểm các đoạn AB và CF. Gọi $X = N'Q \cap FJ$, $Y = M'P \cap CJ$ thì $XY = (MPQN') \cap (FCJ)$. Trong $(M'PQN')$ gọi $I = XY \cap MN$.

Ta có $\dfrac{YM}{AJ} = \dfrac{CM}{CA}$ (3) và $\dfrac{XN}{BJ} = \dfrac{FN}{FB}$ (4) mà $AJ = BJ, AC = BF$ nên từ $(3),(4)$ suy ra $YM = XN \Rightarrow XMYN$ là hình bình hành nên I là trung điểm của MN.

Do $\begin{cases} (M'PQN') \parallel (CEFE) \\ (CFJ) \cap (M'PQN') = XY \Rightarrow XY \parallel CF \\ (CFJ) \cap (CEFE) = CF \end{cases}$ mà $IX = IY$ nên I thuộc đường trung trung tuyến JK của tam giác JCF.

Giới hạn:

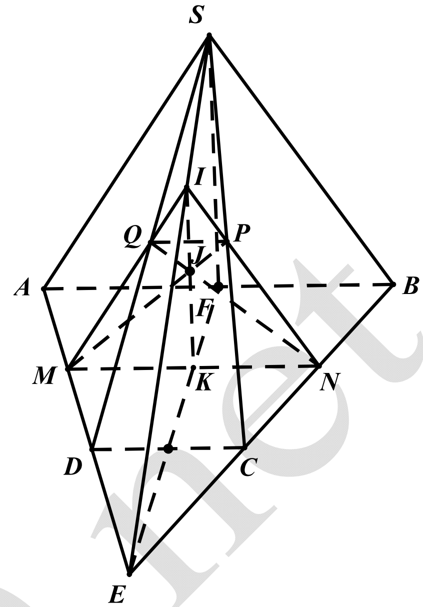
Khi $N \to B \Rightarrow M \to A \Rightarrow I \to J$

Khi $N \to F \Rightarrow M \to C \Rightarrow I \to K$

Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

Vậy tập hợp điểm I là đường trung tuyến JK của tam giác JCF.

Câu 5.



a) Do $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(ABCD)\cap(SAB)=AB\\(ABCD)\cap(\alpha)=MN\end{cases}\Rightarrow MN\parallel AB\ (1)$.

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)\parallel(SAB)\\(SCD)\cap(ABCD)=CD\\(SCD)\cap(\alpha)=PQ\end{cases}$

$\Rightarrow PQ\parallel CD\ (2)$.

Lại có $AB\parallel CD\ (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta có

$MN\parallel AB\parallel CD\parallel PQ$ nên $MNPQ$ là hình thang (*)

Dễ thấy rằng $MQ\parallel SA, NP\parallel SB$ do đó

$\frac{MQ}{SA}=\frac{DM}{DA};\frac{NP}{SB}=\frac{CN}{CB}$ mà $\frac{DM}{DA}=\frac{CN}{CB}$ nên

$\frac{MQ}{SA}=\frac{NP}{SB}$.

Mặt khác ΔSAB cân tại $S\Rightarrow SA=SB$

$\Rightarrow MQ=NP\ (**)$. Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

b) $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow MQ+NP=MN+PQ$

Ta có $\frac{MQ}{SA}=\frac{DM}{DA}=\frac{a-x}{a}\Rightarrow MQ=2(a-x)\Rightarrow NP=2(a-x)$

Lại có $\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{a}\Rightarrow PQ=x$

Không khó khăn ta tính được $MN=3a-2x$

Do đó $MQ+NP=MN+PQ\Leftrightarrow 4(a-x)=3a-2x+x\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$.

Khi đó tính được $r=\frac{a\sqrt{7}}{6}$.

c) Gọi $E=AD\cap BC\Rightarrow SE=(SAD)\cap(SBC)$.

$I=MP\cap NQ\Rightarrow\begin{cases}I\in MP\subset(SAD)\\I\in NQ\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow I\in SE$.

Giới hạn:

Gọi I_0 là giao điểm của SE với mặt phẳng (β) đi qua CD và song song với (SAB).

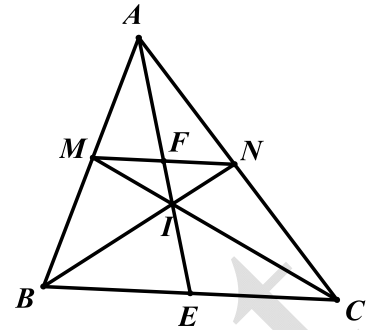
Khi $M\to D\Rightarrow N\to B\Rightarrow I\to I_0$

Khi $M\to A\Rightarrow N\to B\Rightarrow I\to S$

Phần đảo: (bạn đọc tự giải)

d) Gọi $K=IJ\cap MN$, vì $MNPQ$ là hình thang cân nên K là trung điểm của MN. Gọi $F=EK\cap AB$ thì F là trung điểm của AB nên F cố định dễ thấy $IJ \parallel SF$ suy ra IJ có phương không đổi và điểm J thuộc mặt phẳng cố định (SEF).

Câu 6. Bổ đề:



Cho tam giác ABC các điểm M, N thuộc các cạnh AB, AC sao cho $MN \parallel BC$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, MN và $I = MB \cap CN$ thì A, F, I, E thẳng hàng.

Chứng minh:

Ta có $2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \dfrac{AB}{AM}\overrightarrow{AM} + \dfrac{AC}{AN}\overrightarrow{AN}$

$= k\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right) = 2k\overrightarrow{AF}$.

Với $k = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AC}{AN}$.

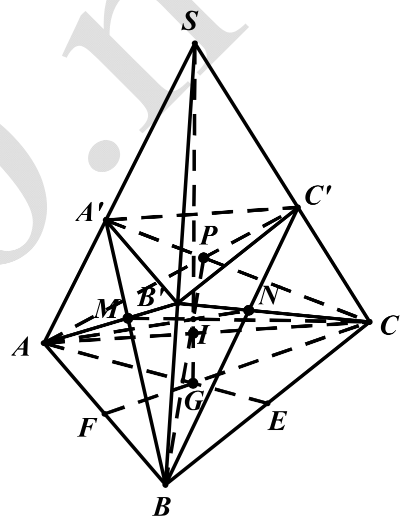
Hay A, E, F thẳng hàng.

Mặt khác $2\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = -\dfrac{IB}{IN}\overrightarrow{IN} - \dfrac{IC}{IM}\overrightarrow{IM}$

$= l\left(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM}\right) = 2l\overrightarrow{IF}$ vời $l = -\dfrac{IB}{IN} = -\dfrac{IC}{IM} \Rightarrow I, E, F$ thẳng hàng.

Vậy A, F, I, E thẳng hàng.

Quay lại bài toán:



Gọi $M = AB' \cap BA', P = AC' \cap CA', N = BC' \cap CB'$ và $I = CM \cap AN$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AN \subset (ABC') \\ I \in CM \subset (BCA') \end{cases} \Rightarrow I \in BP = (ABC') \cap (BCA')$.

Vậy I chính là điểm đồng quy của ba mặt phẳng $(A'BC), (B'AC), (C'AB)$.

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, BA.

Theo bổ đề trên ta có S, N, E thẳng hàng và $I \in AN$ nên $I \in (SAE)$.

Tương tự $I \in (SCF)$. Gọi G là trọng tâm của ΔABC thì $SG = (SAE) \cap (SCF)$ nên $I \in SG$.

Từ đó dễ dàng lập luận được quỹ tích điểm I là đoạn thẳng SG trừ S và G.

Câu 7.

a) Gọi O, O' lần lượt là trọng tâm các mặt $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

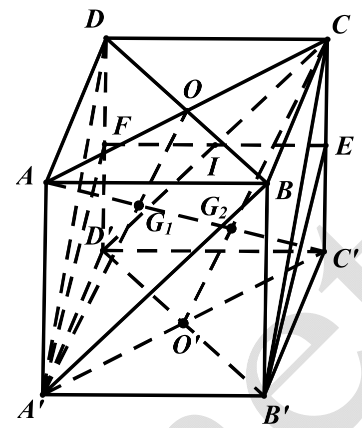
Dễ thấy $DBB'D'$ là hình bình hành nên $B'D' \parallel BD \subset (BDA')$

$\Rightarrow B'D' \parallel (BDA')$ (1).

Tương tự $OCO'A'$ là hình bình hành nên $O'C // OA' \subset (A'BD)$

$\Rightarrow CO' \parallel (A'BD)$ (2).

Từ $(1),(2)$ suy ra $(A'BD) \parallel (CB'D')$.



b) Ta có $A'O$ là trung tuyến của tam giác $A'BD$ và $\dfrac{G_1O}{G_1A'} = \dfrac{OA}{A'C'} = \dfrac{1}{2}$ nên G_1 là trọng tâm của tam giác $A'BD$.

Tương tự G_2 cũng là trọng tâm của tam giác $CB'D'$. Dễ thấy OG_1 và $O'G_2$ là đường trung bình của các tam giác ACG_2 và $A'C'G_1$ nên

$AG_1 = G_1G_2 = G_1C' = \dfrac{1}{3}AC'$.

c) Gọi I là trung điểm của CD'. Do G_2 là trọng tâm tam giác $CB'D'$ nên $I \in B'G_2 \subset (A'B'G_2)$.

Vậy $\begin{cases} I \in (A'B'G_2) \cap (CDD'C') \\ A'B' \parallel C'D' \\ A'B' \subset (A'B'G_2) \\ C'D' \subset (CDD'C') \end{cases} \Rightarrow (A'B'G_2) \cap (CDD'C') = EF \parallel C'D'$

$E \in CC', F \in DD'$. Thiết diện là hình bình hành $A'B'EF$

Câu 8. a) Dễ thấy $PN \parallel CD'$ và $QM \parallel A'B$ mà $A'B \parallel C'D$ nên $PN \parallel QM$ hay M, N, P, Q đồng phẳng.

b) Do $PC'MA$ là hình bình hành nên MP đi qua trung điểm O của AC'.

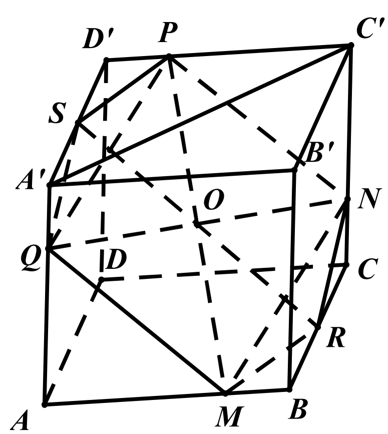
$\Rightarrow O \in (MNPQ)$.

Mặt khác $A'B \parallel MQ \subset (MNPQ)$

$\Rightarrow A'B \parallel (MNPQ)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua O và song song với $A'B$ thì Δ cố định và $\Delta \subset (MNPQ)$. Hay $(MNPQ)$ luôn chứa đường thẳng cố định Δ.

$(MNPQ) \parallel (A'BC') \Rightarrow BC' \parallel (MNPQ) \Rightarrow BC' \parallel NR$



$\Leftrightarrow \frac{BR}{BC} = \frac{C'N}{CC'} \Rightarrow x = \frac{a}{2}$. Đảo lại $x = \frac{a}{2}$, dễ dàng chứng minh được $(MNPQ) \parallel (A'BC')$.

c) Dễ thấy Δ cắt $BC, A'D'$ tại các trung điểm R và S của chúng.
Thiết diện là lục giác $MPNPSQ$. Dễ thấy lục giác có tâm đối xứng là O nên $MQ = NP, MR = NS, RN = SQ$ do đó chu vi thiết diện là

$2p = 2(RM + MQ + QS)$. Ta có $MR = QS = \sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}$, $QM = x\sqrt{2}$

Vậy $2p = 2\left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + (a-x)^2}\right)$.

Đặt $f(x) = x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2}; x \in [0;a]$.

Theo CauChy -Schwarz

$\sqrt{\left(a^2 + 4(a-x)^2\right)\left(1^2 + 1^2\right)} \geq a + 2(a-x) \Rightarrow \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x)$

Nên $f(x) \geq x\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(3a - 2x) = \frac{3a}{\sqrt{2}}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{a}{2}$

Vậy $\min(2p) = 3\sqrt{2}a$.

Mặt khác bằng biến đổi tương đương ta có

$x\sqrt{2} + \sqrt{a^2 + 4(a-x)^2} \leq \sqrt{2}a + a \Leftrightarrow (a-x)^2\left[(a-x)^2 - a^2\right] \leq 0$ đúng $\forall x \in [0;a]$. Đẳng thức xảy ra khi $x = a$. Vậy $\max(2p) = 2a\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

Câu 9.

a) Ta có $\begin{cases} (\alpha) \parallel (SAB) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MN \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases} \Rightarrow MN \parallel AB$ Tương tự

$(\alpha) \cap (SAB) = MQ \parallel SA$.

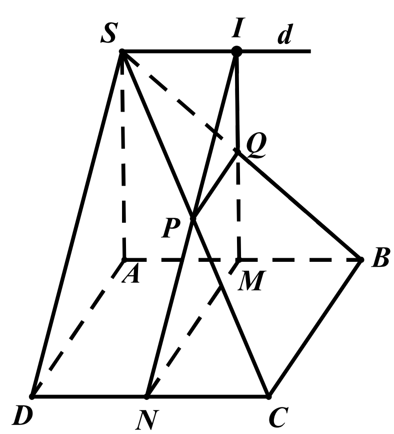
$(\alpha) \cap (SCD) = NP \parallel SD$.

Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Do $\begin{cases} MN \parallel BC \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \\ (SBC) \cap (\alpha) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel MN \ (1)$

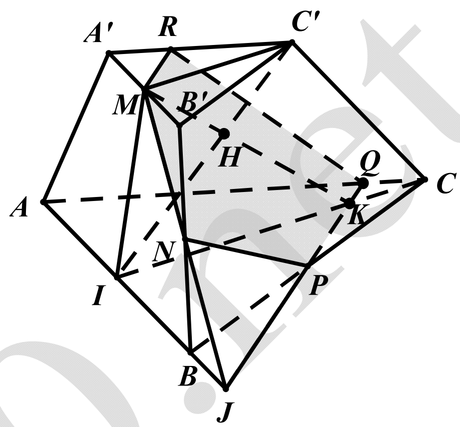
Ta có $MN \parallel AD, MQ \parallel SA$ mà $AD \perp SA$ nên $MN \perp MQ \ (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $MNPQ$ là hình thang vuông.



b) Gọi $d=(SAB)\cap(SCD)$, khi đó $I=NP\cap MQ\Rightarrow\begin{cases}I\in NP\subset(SCD)\\ I\in MQ\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow I\in d$ từ đây dễ dàng tìm được quĩ tích của điểm I.

Câu 10. a) Trong $(ABB'A')$ gọi $J=MN\cap AB$, trong (ABC) gọi $Q=JP\cap AC$.
Ta có $(ABC)\parallel(A'B'C')$ nên $(MNP)\cap(A'B'C')=MR\parallel PQ$.
Thiết diện là ngũ giác $MNPQR$.
b) Trong (ABC) gọi $K=PQ\cap IC$ thì $K\in(MNP)\Rightarrow MK\subset(MNP)$.
Do $CI\parallel C'M$ nên trong $(MICC')$ gọi $H=IC'\cap MK\Rightarrow H=IC'\cap(MNP)$.



Câu 11. a) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(A'D'CB)$ và $N'=(\alpha)\cap BD$.
Ta có $\frac{AM}{AD'}=\frac{DN'}{DB}$ (1)
Ta có $AD'=BD=a\sqrt{2}$ nên $AM=DN'$ mà $AM=DN$
$\Rightarrow DN=DN'\Rightarrow N\equiv N'$.
Vậy $MN\subset(\alpha)\parallel(A'D'CB)$ do đó MN song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.
b) Khi $x=\frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì dễ thấy M,N lần lượt là trọng tâm các tam giác $A'AD$ và CAD nên $A'M$ và CN cắt nhau tại trung điểm I của AD.
Khi đó $\frac{IM}{IA'}=\frac{IN}{IC}\Rightarrow MN\parallel A'C$.