Chứng minh tương tự ta được $OC \perp AB$.

b). H là trực tâm của tam giác ABC.

Gọi $E = AH \cap BC$, $F = BH \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OA\left(OA \perp (OBC)\right) \\ BC \perp OH\left(OH \perp (ABC)\right) \\ OA, OH \subset (OAE) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAE) \Rightarrow BC \perp AE$ (1).

Ta có $\begin{cases} AC \perp OB, AC \perp OH \\ OB, OH \subset (OBF) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBF) \Rightarrow AC \perp BF$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC .

c). Chứng minh $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao : $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OE^2}$ (3) .

Trong ΔOBC vuông tại O có OE là đường cao : $\dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (4) .

Thay (4) vào (3) được $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$ (đpcm)

Công thức này được sử dụng trực tiếp để tính khoảng cách , các bạn nhớ công thức này nhé!

d). Chứng minh : $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

Trong ΔOAE vuông tại O có OH là đường cao

$$OE^2 = EH.EA \Leftrightarrow OE^2.BC^2 = EH.BC.EA.BC \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}OE.BC\right)^2 = \frac{1}{2}.EH.BC.\frac{1}{2}EA.BC$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} \ (*)$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta được: $S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$ (**)

$$S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC} \ (***)$$

Cộng từng vế (*) ,(**) , (***) :

$$S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta HBC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC} + S_{\Delta HAC}.S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC}.\left(S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAC}\right)$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S_{\Delta ABC}.S_{\Delta ABC}$$

$$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC} + S^2_{\Delta OAC} = S^2_{\Delta ABC}.$$

Cách 2 : $S^2_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{4}AE^2BC^2 = \dfrac{1}{4}\left(OA^2 + OE^2\right)BC^2 = \dfrac{1}{4}OA^2.BC^2 + \dfrac{1}{4}OE^2.BC^2$

$$=\frac{1}{4}OA^2\left(OB^2+OC^2\right)+\frac{1}{4}OE^2.BC^2$$

$$=\frac{1}{4}OA^2.OB^2+\frac{1}{4}OA^2.OC^2+\frac{1}{4}OE^2.BC^2$$

$\Leftrightarrow S^2_{\Delta OBC}+S^2_{\Delta OAC}+S^2_{\Delta OAC}=S^2_{\Delta ABC}$

e). Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

Gọi độ dài ba cạnh $OA=a, OB=b, OC=c$.

Trong tam giác ABC áp dụng định lý cosin có

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\frac{a^2+b^2+a^2+c^2-\left(b^2+c^2\right)}{2.AB.AC}=\frac{a^2}{AB.AC}>0\ .$$

Kết luận A là góc nhọn

Chứng minh tương tự góc B và góc C nhọn .

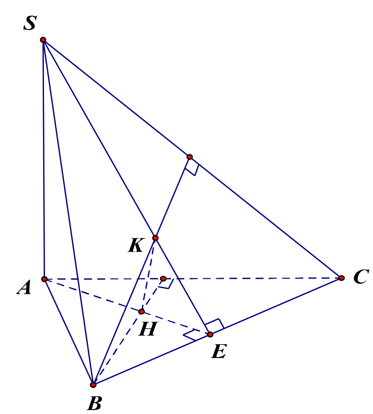
Câu 7: Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H , K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng :

a). AH , SK , BC đồng quy.

b). SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

c). HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

LỜI GIẢI



a). Gọi $E=AH\cap BC$

Ta có $\begin{cases}BC\perp AE\\ BC\perp SA\\ AE,SA\subset(SAE)\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAE\right)$

$\Rightarrow BC\perp SE\left(SE\subset\left(SAE\right)\right)$.

Vì $\begin{cases}SK\perp BC\\ SE\perp BC\end{cases}$, suy ra ba điểm S, K, E thẳng hàng.

Kết luận ba đường thẳng AH, BC, SK đồng qui tại điểm E .

b). SC vuông góc với mặt phẳng (BHK).

Có $\begin{cases}BH\perp AC\\ BH\perp SA\end{cases}\Rightarrow BH\perp\left(SAC\right)\Rightarrow BH\perp SC\left(SC\subset\left(SAC\right)\right)$.

Có $\begin{cases}SC\perp BH\left(BH\perp\left(SAC\right)\right)\\ SC\perp BK\end{cases}\Rightarrow SC\perp\left(BHK\right)$

c). HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

Có $BC\perp\left(SAE\right)\ \Rightarrow BC\perp HK\left(KH\subset\left(SAE\right)\right)$ (1) .

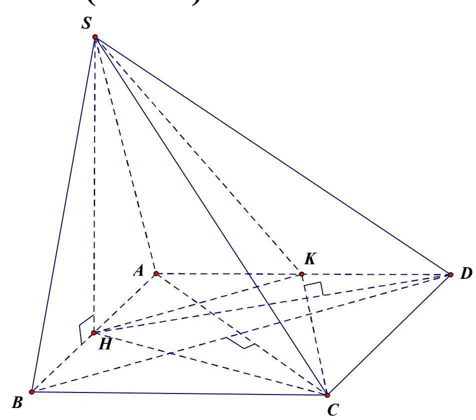
Có $SC\perp\left(BHK\right)\ \Rightarrow SC\perp HK$ (2) .

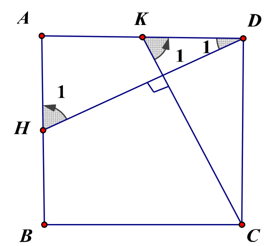
Từ (1) và (2) suy ra $HK \perp (SBC)$

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. SAB là tam giác đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K là trung điểm của AB, AD.
a). Chứng minh $SH \perp (ABCD)$. b). Chứng minh $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

LỜI GIẢI

a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.





Hình 1

Trong ΔBCH có: $HC^2 = BH^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (SH đường cao của ΔSAB đều).

Trong ΔSCH ta có: $SC^2 = SH^2 + HC^2 = 2a^2$. Suy ra tam giác SHC vuông tại H.

Có $\begin{cases} SH \perp AB (gt) \\ SH \perp HC \\ AB, HC \subset (ABCD),\ AB \cap HC = H \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

b). Chứng minh $AC \perp SK$. Ta có $\begin{cases} HK \parallel BD \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp HK$.

Có $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp HK \\ SH, HK \subset (SHK),\ SH \cap HK = H \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$.

Chứng minh $CK \perp SD$.

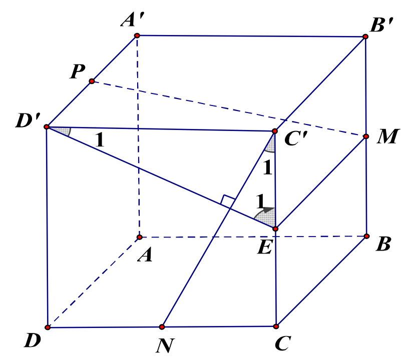
Vì đáy ABCD hình vuông (hình 1), dễ dàng chứng minh $\Delta CDK = \Delta DAH$. Suy ra:

$K_1 = H_1$, mà $H_1 + D_1 = 90^0 \Rightarrow K_1 + D_1 = 90^0 \Rightarrow CK \perp DH$

Ta có : $\begin{cases} CK \perp SH \\ CK \perp DH \\ SH, DH \subset (SHD), SH \cap DH = H \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SHD) \Rightarrow CK \perp SD$ (đpcm)

Câu 9: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2002
Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BB', CD, A'D'. Chứng minh: $MP \perp C'N$.

LỜI GIẢI



Gọi E trung điểm của CC'. Ta có $ME \parallel A'D'$ nên ED và PD' đồng phẳng.

Vì có CDD'C' là hình vuông nên dễ dàng chứng minh hai tam giác D'C'E và C'CN bằng nhau, suy ra $D'_1 = C'_1$, mà

$D'_1 + E = 90^0 \Rightarrow C'_1 + E = 90^0 \Rightarrow ED' \perp NC'$ (1).

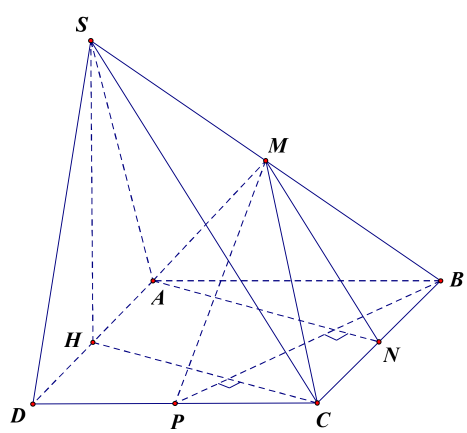
Ta có $BC \perp (CDD'C') \Rightarrow BC \perp NC'$ mà

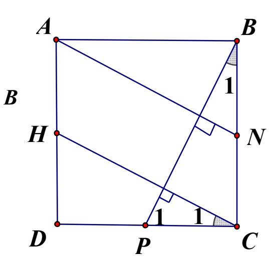
$ME \parallel BC, \quad \Rightarrow ME \perp NC' \qquad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $NC' \perp (MED'P) \Rightarrow NC' \perp PM\left(PM \subset mp(MED'P)\right)$.

Câu 10: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2007
Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh $AM \perp BP$.

LỜI GIẢI:





Hạ $SH \perp AD$ tại H. Vì SAD là tam giác đều nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vì mặt phẳng (SAD) vuông góc mặt phẳng (ABCD) có AD là giao tuyến . Suy ra $SH \perp mp(ABCD)$.

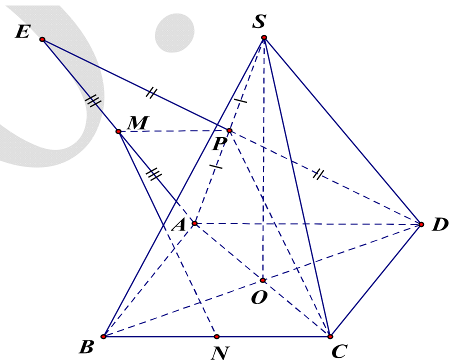
Ta có $\begin{cases} AN \parallel HC,\ MN \parallel SC \\ AM, MN \subset (AMN) \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC) \\ HC, SC \subset (SHC) \end{cases}$

Trong hình vuông ABCD có $\Delta BCP = \Delta CDH\left(c.g.c\right)$ nên $B_1 = C_1$ mà $B_1 + P_1 = 90^0 \Rightarrow C_1 + P_1 = 90^0 \Rightarrow CH \perp PB$.

Ta có $\begin{cases} BP \perp CH \\ BP \perp SH \end{cases} \Rightarrow BP \perp \left(SHC\right) \Rightarrow BP \perp \left(AMN\right) \Rightarrow BP \perp AM$.

Câu 11: ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI B NĂM 2007
Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh $MN \perp BD$.

LỜI GIẢI



Gọi O giao điểm của AC và BD. P trung điểm của SA. Vì S.ABCD là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Trong ΔEAD có MP là đường trung bình của tam giác nên có $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (1)

Vì N trung điểm của BC nên $\overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác CPMN là hình bình hành, nên MN // PC

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \\ AC, SO \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(SAC\right) \Rightarrow BD \perp CP\left(CP \subset \left(SAC\right)\right)$,

mà $MN \parallel CP \Rightarrow BD \perp MN$. Kết luận $BD \perp MN$

Câu 12: Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và biết rằng A'H $\perp$ (ABC). Chứng minh rằng:
a) $AA' \perp BC$ và $AA' \perp B'C'$.
b) Gọi MM' là giao tuyến của hai mp(AHA') và (BCC'B') trong đó M $\in$ BC và M' $\in$ B'C'. Chứng minh tứ giác BCC'B' là hình chữ nhật và MM' là đường cao của hình chữ nhật đó.

LỜI GIẢI

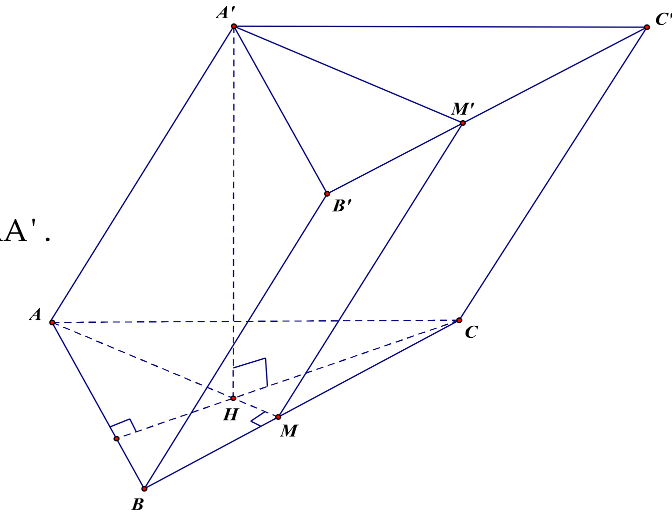
a) Chứng minh $BC \perp (A'AH)$.

$\begin{cases} BC \perp AH (gt) \\ BC \perp A'H (\text{vì } A'H \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(A'AH) \Rightarrow BC \perp AA'$.

Vì $B'C' \parallel BC$ mà

$BC \perp AA' \Rightarrow AA' \perp B'C'$.



b. $\begin{cases} (AHA') \cap (BCC'B') = MM' \\ AA' \parallel BB' \\ AA' \subset (AHA'),\ BB' \subset (BCC'B') \end{cases} \Rightarrow MM' \parallel AA' \parallel BB'$

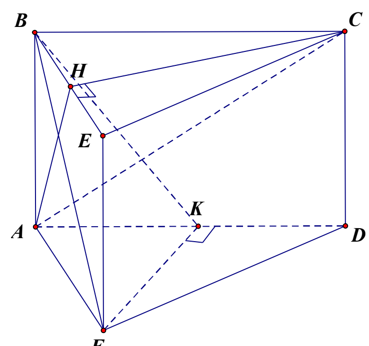
Mà $BC \perp (AHA') \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow BB' \perp BC$. Vậy BCC'B' là hình chữ nhật.

Câu 13: Cho hai hình chữ nhật ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau sao cho $AC \perp BF$. Gọi CH và FK là hai đường cao của tam giác BCE và ADF. Chứng minh:

a). ACH và BFK là các tam giác vuông. b) $BF \perp AH$ và $AC \perp BK$.

LỜI GIẢI

a). Ta có ABCD, ABEF là hình chữ nhật nên :



Có $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BE \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCE) \Rightarrow AB \perp CH \quad (1)$.

Có $\begin{cases} CH \perp BE (gt) \\ CH \perp AB (\text{do } (1)) \end{cases} \Rightarrow CH \perp (ABEF) \Rightarrow CH \perp AH$.

Vậy Δ ACH vuông tại H.

Chứng minh tương tự $FK \perp (ABCD) \Rightarrow FK \perp BK$ .Vậy ΔBFK vuông tại K.

b. Chứng minh: BF $\perp$ AH và AC $\perp$ BK.

Có $\begin{cases} BF \perp AC (gt) \\ BF \perp CH (\text{vì } CH \perp (ABEF)) \end{cases} \Rightarrow BF \perp (ACH) \Rightarrow BF \perp AH (AH \subset (ACH))$.

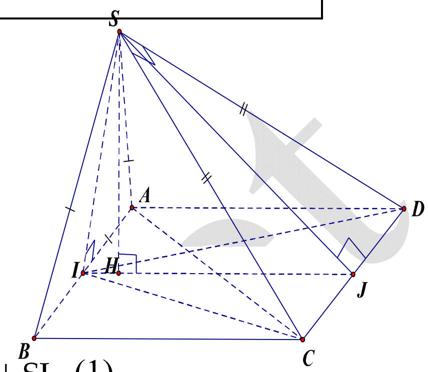
Có $\begin{cases} AC \perp FB (gt) \\ AC \perp FK (\text{vì } FK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BKF) \Rightarrow AC \perp BK$.

Câu 14: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J là trung điểm của AB và CD.

a). Tính các cạnh của tam giác SIJ và chứng minh SI $\perp$ (SCD), SJ $\perp$ (SAB).

b). Gọi SH là đường cao của tam giác SIJ. Chứng minh $SH \perp (ABCD)$ và tính độ dài SH.

LỜI GIẢI



a). Vì ΔSAB đều nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. ΔSCD vuông cân tại S suy ra

$SJ = CJ = DJ$

$= \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$, $SC = SD = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ và $IJ = AD = BC = a$.

Xét ΔSIJ: $IJ^2 = SI^2 + SJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S, nên $SI \perp SJ$ (1)

Trong tam giác IBC vuông tại B có $IC^2 = BI^2 + BC^2 = \dfrac{5a^2}{4}$.

Xét ΔSIC: $IC^2 = SI^2 + SC^2 = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow \Delta SIC$ vuông tại S, suy ra $SI \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) có $\begin{cases} SI \perp SJ,\ SI \perp SC \\ SJ, SC \subset mp(SCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp mp(SCD)$

Chứng minh tương tự $\begin{cases} SJ \perp SI,\ SJ \perp SB \\ SI, SB \subset mp(SAB) \end{cases} \Rightarrow SJ \perp mp(SAB)$

b). Đầu tiên ta chứng minh $CD \perp (SIJ)$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp IJ \\ CD \perp SI\left(\text{vì } SI \perp (SCD)\right) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH\left(\text{do } SH \subset (SIJ)\right)$ (1)

Ta lại có $\begin{cases} SH \perp IJ\,(gt) \\ SH \perp CD\,(\text{do } (1)) \\ IJ, CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp mp(ABCD)$.

Tính SH : Xét ΔSIJ vuông tại S có

$$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

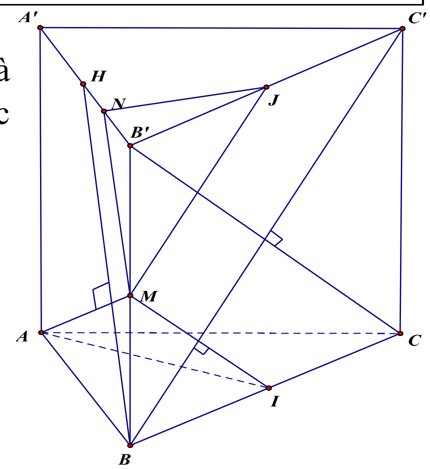
Câu 15: Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và CC' = a.

a). Gọi I trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b). Gọi M trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

c). Lấy điểm N thuộc A'B' sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của B'C'. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

LỜI GIẢI



Vì ABC.A'B'C' lăng trụ đứng và $AB = BC = CA = CC' = a$ Nên các mặt bên là các hình vuông

a) Chứng minh $AI \perp BC'$.

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp CC' \end{cases} \Rightarrow AI \perp mp(BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$$

b) Chứng minh $AM \perp BC'$.

$IM \parallel CB'$, $CB' \perp BC'$ (tính chất hình vuông) .

Suy ra $IM \perp BC'$

Ta có $AI \perp BC'$ (câu a)) và $IM \perp BC'$ .Vậy $BC' \perp (AMI) \Rightarrow BC' \perp AM$ (đpcm).

c). Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Gọi H trung điểm của A'B', suy ra N trung điểm của HB'.

Ta có $MN \parallel BH$, $BH \perp AM$ (tính chất hình vuông) . Suy ra $MN \perp AM$ (1).

$MJ \parallel BC'$, $AM \perp BC'$ (do câu b)) . Suy ra $AM \perp MJ$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $AM \perp mp(MNJ)$

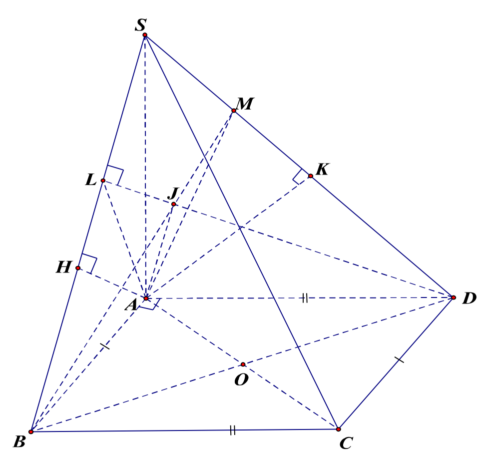
Nhận xét: *Bài này không có độ khó, chứng minh được nhờ số liệu bài cho đặc biệt cạnh bên bằng cạnh đáy, và các bạn phải nhớ 2 đường trung tuyến xuất phát từ hai đỉnh kề nhau của hình vuông thì vuông góc với nhau.*

Câu 16: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật tâm O, SA $\perp$ (ABCD).

a). Gọi H, K là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh SC $\perp$ (AHK).

b). Dựng AJ $\perp$ (SBD), $J \in (SBD)$. Chứng minh J là trực tâm của tam giác SBD.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh $BC \perp (SAB)$:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

Có $\begin{cases} AH \perp SB(gt) \\ AH \perp BC(\text{do } (1)) \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \quad (*)$

Chứng minh $CD \perp (SAD)$: