Từ $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod 5$ (1)

Lại có $2^2 \equiv 4 \pmod 5$ (2)

Nhân (1) với (2), vế theo vế ta có: $2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+2} - 4 \equiv 0 \pmod 5$

Hay $2^{4k+2} - 4$ chia hết cho 5 với mọi k = 0, 1, 2, ... hay ta được vô số số dạng 2^n – 4

($n \in N$) chia hết cho 5

Chú ý: khi giải các bài toán về đồng dư, ta thường quan tâm đến $a \equiv \pm 1 \pmod m$

$a \equiv 1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv 1 \pmod m$

$a \equiv -1 \pmod m \Rightarrow a^n \equiv (-1)^n \pmod m$

3. Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $20^{15} – 1$ chia hết cho 11 b) $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

Giải

a) $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (1); $10 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 10^5 \equiv -1 \pmod{11}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2^5 . 10^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 20^5 – 1 \equiv 0 \pmod{11}$

b) $2^6 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} \equiv -1 \pmod{13}$ (3)

$3^3 \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 3^{30} \equiv 1 \pmod{13}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $2^{30} + 3^{30} \equiv -1 + 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{30} + 3^{30} \equiv 0 \pmod{13}$

Vậy: $2^{30} + 3^{30}$ chi hết cho 13

c) $555 \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 2^{222} \pmod 7$ (5)

$2^3 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow (2^3)^{74} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 555^{222} \equiv 1 \pmod 7$ (6)

$222 \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv (-2)^{555} \pmod 7$

Lại có $(-2)^3 \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow [(-2)^3]^{185} \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 222^{555} \equiv -1 \pmod 7$

Ta suy ra $555^{222} + 222^{555} \equiv 1 - 1 \pmod 7$ hay $555^{222} + 222^{555}$ chia hết cho 7

4. Ví dụ 4: Chứng minh rằng số $2^{2^{4n+1}} + 7$ chia hết cho 11 với mọi số tự nhiên n

Thật vậy:Ta có: $2^5 \equiv -1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$

Xét số dư khi chia 2^{4n+1} cho 10. Ta có: $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4n} \equiv 1 \pmod 5$

$\Rightarrow 2.2^{4n} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2$

Nên $2^{2^{4n+1}} + 7 = 2^{10k+2} + 7 = 4.\ 2^{10k} + 7 = 4.(BS\ 11 + 1)^k + 7 = 4.(BS\ 11 + 1^k) + 7$

$= BS\ 11 + 11$ chia hết cho 11

Bài tập về nhà:

Bài 1: CMR:

a) $2^{28} – 1$ chia hết cho 29

b)Trong các số có dạng$2^n – 3$ có vô số số chia hết cho 13

Bài 2: Tìm số dư khi chia A = $20^{11} + 22^{12} + 1996^{2009}$ cho 7.