Giải

a) Luỹ thừa của mọi số hạng của A chia 4 thì dư 1(Các số hạng của A có dạng $n^{4(n-2)+1}$

($n \in \{2; 3; ...; 2004\}$) nên mọi số hạng của A và luỹ thừa của nó có chữ số tận cùng giống nhau (Tính chất 2) nên chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng các số hạng

Từ 2 đến 2004 có 2003 số hạng trong đó có 2000 : 10 = 200 số hạng có chữ số tận cùng bằng 0,Tổng các chữ số tận cùng của A là

$(2 + 3 + ...+ 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 9009$ có chữ số tận cùng là 9

Vây A có chữ số tận cùng là 9

Bài 3: Tìm

a) Hai chữ số tận cùng của 3^{999}; $\left(7^7\right)^7$

b) Ba chữ số tận cùng của 3^{100}

c) Bốn chữ số tận cùng của 5^{1994}

Giải

a) $3^{999} = 3.3^{998} = 3.\ 9^{499} = 3.(10 - 1)^{499} = 3.(10^{499} - 499.10^{498} + ...+499.10 - 1)$

$= 3.[BS(100) + 4989] = ...67$

$7^7 = (8 - 1)^7 = BS(8) - 1 = 4k + 3 \Rightarrow \left(7^7\right)^7 = 7^{4k+3} = 7^3.\ 7^{4k} = 343.(...01)^{4k} = ...43$

b) $3^{100} = 9^{50} = (10 - 1)^{50} = 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \frac{50.49}{2}.\ 10^2 - 50.10 + 1$

$= 10^{50} - 50.\ 10^{49} + ...+ \frac{49}{2}.\ 5000 - 500 + 1 = BS(1000) + 1 = ...001$

Chú ý:

+ Nếu n là số lẻ không chi hết cho 5 thì ba chữ số tận cùng của n^{100} là 001

+ Nếu một số tự nhiên n không chia hết cho 5 thì n^{100} chia cho 125 dư 1

HD C/m: n = 5k + 1; n = 5k + 2

+ Nếu n là số lẻ không chia hết cho 5 thì n^{101} và n có ba chữ số tận cùng như nhau

c) Cách 1: $5^4 = 625$

Ta thấy số $(...0625)^n = ...0625$

$5^{1994} = 5^{4k+2} = 25.(5^4)^k = 25.(0625)^k = 25.(...0625) = ...5625$

Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4.\ 5^4$

Ta thấy $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1)$ chia hết cho 16

Ta có: $5^{1994} = 5^6.\ (5^{1988} - 1) + 5^6$

Do 5^6 chia hết cho 5^4, còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 nên $5^6(5^{1988} - 1)$ chia hết cho 10000

Ta có $5^6 = 15625$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625

Chú ý: Nếu viết $5^{1994} = 5^2.\ (5^{1992} - 1) + 5^2$

Ta có: $5^{1992} – 1$ chia hết cho 16; nhưng 5^2 không chia hết cho 5^4

Như vậy trong bài toán này ta cần viết 5^{1994} dưới dạng $5^n(5^{1994-n} – 1) + 5^n$; $n \geq 4$ và $1994 – n$ chia hết cho 4

C. Vận dụng vào các bài toán khác

Bài 1:

Chứng minh rằng: Tổng sau không là số chính phương

a) $A = 19^k + 5^k + 1995^k + 1996^k$ ($k \in N$, k chẵn)

b) $B = 2004^{2004k} + 2001$

Giải

a) Ta có:

19^k có chữ số tận cùng là 1

5^k có chữ số tận cùng là 5

1995^k có chữ số tận cùng là 5

1996^k có chữ số tận cùng là 6

Nên A có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của tổng các chữ số tận cùng của tổng

1 + 5 + 5 + 6 = 17, có chữ số tận cùng là 7 nên không thể là số chính phương

b) Ta có :k chẵn nên $k = 2n$ ($n \in N$)

$2004^{2004k} = (2004^4)^{501k} = (2004^4)^{1002n} = (...6)^{1002n}$ là luỹ thừa bậc chẵn của số có chữ số tận cùng là 6 nên có chữ số tận cùng là 6 nên $B = 2004^{2004k} + 2001$ có chữ số tận cùng là 7, do đó B không là số chính phương

Bài 2:

Tìm số dư khi chia các biểu thức sau cho 5

a) $A = 2^1 + 3^5 + 4^9 + ... + 2003^{8005}$

b) $B = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + ... + 2005^{8007}$

Giải

a) Chữ số tận cùng của A là chữ số tận cùng của tổng

$(2 + 3 + ... + 9) + 199.(1 + 2 + ... + 9) + 1 + 2 + 3 = 9005$

Chữ số tận cùng của A là 5 nên chia A cho 5 dư 0

b)Tương tự, chữ số tận cùng của B là chữ số tận cùng của tổng

$(8 + 7 + 4 + 5 + 6 + 3 + 2 + 9) + 199.(1 + ... + 9) + 8 + 7 + 4 + 5 = 9024$

B có chữ số tận cùng là 4 nên B chia 5 dư 4

Bài tập về nhà

Bài 1: Tìm chữ số tận cùng của: 3^{102} ; $\left(7^3\right)^5$; $3^{20} + 2^{30} + 7^{15} - 8^{16}$

Bài 2: Tìm hai, ba chữ số tận cùng của: 3^{555}; $\left(2^7\right)^9$

Bài 3: Tìm số dư khi chia các số sau cho 2; cho 5:

a) 3^8; $14^{15} + 15^{14}$

b) $2009^{2010} – 2008^{2009}$