

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

**Bài 4:** Với  $a, b, c \geq 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng:  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8abc$

**Giải:** Ta có:  $a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 - a = b + c \geq 2\sqrt{bc} \\ 1 - b = c + a \geq 2\sqrt{ca} \\ 1 - c = a + b \geq 2\sqrt{ab} \end{cases}$

Suy ra:  $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$  (đpcm). Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$

**Bài 5:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số sau:  $f(x) = x(1 - x)$  với  $0 \leq x \leq 1$

**Giải:** Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:  $x(1 - x) \leq \left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Suy ra:  $f(x) = x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ . Vậy: Hàm số  $f(x)$  đạt GTLN bằng  $\frac{1}{4}$  khi  $x = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

**Bài 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(x) = x + \frac{4}{x} + 4$  với  $x > 0$

**Giải:** Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:  $x + \frac{4}{x} + 4 \geq 4 + 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4 + 4 = 8$

Suy ra:  $f(x) = x + \frac{4}{x} + 4 \geq 8$ . Vậy: Hàm số  $f(x)$  đạt GTNN bằng 8 khi  $x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$

**Bài 7:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $f(x) = \sqrt{6 - 2x} + \sqrt{2x + 4}$  trên đoạn  $[-2; 3]$

**Giải:** Ta có:  $f^2(x) = 6 - 2x + 2\sqrt{(6 - 2x)(2x + 4)} + 2x + 4 = 10 + 2\sqrt{(6 - 2x)(2x + 4)}$   
 $\leq 10 + (6 - 2x + 2x + 4) = 20 \Rightarrow f(x) \leq \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Vậy: Hàm số  $f(x)$  đạt GTLN bằng  $2\sqrt{5}$  khi  $6 - 2x = 2x + 4 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

### III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Với  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $(a + b)(a + c)(b + c) \geq 8abc$

**Bài 2:** Với  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 8$

**Bài 3:** Với  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $(a + b + c)(ab + bc + ca) \geq 9abc$

**Bài 4:** Với  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6$

(HD:  $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ ,  $\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ ,  $\frac{c+a}{b} = \frac{c}{b} + \frac{a}{b}$ ; nhóm  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ )

**Bài 5:** Với  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

(HD:  $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geq 2\sqrt{\frac{ab^2c}{ac}} = 2b$ , cộng vế với vế  $\Rightarrow đpcm$ )

**Bài 6:** Với  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 8a^2b^2c^2$

**Bài 7:** Cho  $a, b, c \geq 0$  và  $abc = 1$ . Chứng minh:  $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8$

**Bài 8:** Với  $x, y > 0$ . Chứng minh:  $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$

**Bài 9:** Với  $a, b, c > 0$ . Chứng minh:  $\frac{a^3b}{c} + \frac{a^3c}{b} + \frac{b^3a}{c} + \frac{b^3c}{a} + \frac{c^3a}{b} + \frac{c^3b}{a} \geq 6abc$

(HD: Áp dụng BĐT Côsi cho 6 số)

**Bài 10:** Với  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh:  $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc$

**Bài 11:** Với  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh:  $\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 64$

(HD:  $1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{a+b+c}{a} = 1 + 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq \sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$ , sau đó nhân vế với vế  $\Rightarrow đpcm$ )

**Bài 12:** Tìm giá trị nhỏ nhất của:

a)  $f(x) = x + \frac{3}{x} + 5$  với  $x > 0$

b)  $f(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{5(1-x)}{x}$  với  $0 < x < 1$

c)  $f(x) = x^2 + \frac{4}{x^2}$  với  $x > 0$

d)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{1-x}$  với  $0 < x < 1$

e)  $f(x) = \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

e)  $f(x) = \frac{a^2}{a^4+1}$

**Bài 13:** Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a)  $f(x) = x^3(8 - x^3)$  trên đoạn  $[0; 2]$

b)  $f(x) = (14 - 7x)(7x + 21)$  trên đoạn  $[-3; 2]$

b)  $f(x) = (2x - 1)(3 - 5x)$  trên đoạn  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]$

**Bài 14:** Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a)  $f(x) = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-1}$  trên đoạn  $[1; 5]$

b)  $f(x) = \sqrt{2x+8} + \sqrt{10-2x}$  trên đoạn  $[-4; 5]$

hoc360.net