$\Leftrightarrow \left(a^2-4ab+4b^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)+\left(a^2-4ad+4d^2\right)+\left(a^2-4ac+4c^2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2c)^2\geq 0$

Ví dụ 2: Chứng minh rằng: $\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right)$

Giải:

$\left(a^{10}+b^{10}\right)\left(a^2+b^2\right)\geq\left(a^8+b^8\right)\left(a^4+b^4\right) \Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12}\geq a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2\left(a^2-b^2\right)+a^2b^8\left(b^2-a^2\right)\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6)\geq 0 \Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4)\geq 0$

Ví dụ 4: cho ba số thực khác không x, y, z thỏa mãn: $\begin{cases} x.y.z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<x+y+z \end{cases}$

Chứng minh rằng : có đúng một trong ba số x,y,z lớn hơn 1

Giải: Xét $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz + (xy + yz + zx) + x + y + z - 1$

$= (xyz - 1) + (x + y + z) - xyz(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = x + y + z - (\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) > 0$

(vì $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<x+y+z$ theo gt) $\rightarrow$ 2 trong 3 số x-1 , y-1 , z-1 âm hoặc cả ba sỗ-1 , y-1, z-1 là dương.

Nếu trường hợp sau xảy ra thì x, y, z >1 $\rightarrow$x.y.z>1 Mâu thuẫn gt x.y.z =1 bắt buộc phải xảy ra trường hợp trên tức là có đúng 1 trong ba số x ,y ,z là số lớn hơn 1

3) Phương pháp 3: dùng bất đẳng thức quen thuộc

A) một số bất đẳng thức hay dùng

1) Các bất đẳng thức phụ:

a) $x^2 + y^2 \geq 2xy$ b) $x^2 + y^2 \geq |\ xy\ |$ dấu(=) khi x = y = 0

c) $(x+y)^2 \geq 4xy$ d) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

2)Bất đẳng thức Cô sy: $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 .... a_n}$ Với $a_i > 0$

3)Bất đẳng thức Bunhiacopski

$$(a_2{}^2 + a_2^2 + ... + a_n^2).(x_1^2 + x_2^2 + ... +_n^2) \geq (a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n)^2$$

4) Bất đẳng thức Trê-bư - sép:

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \leq B \leq C \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{aA + bB + cC}{3} \geq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Nếu $\begin{cases} a \leq b \leq c \\ A \geq B \geq C \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{aA + bB + cC}{3} \leq \frac{a+b+c}{3} . \frac{A+B+C}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a = b = c \\ A = B = C \end{cases}$

B) các ví dụ

ví dụ 1

Cho a, b ,c là các số không âm chứng minh rằng (a+b) (b+c)(c+a) $\geq$ 8abc

Giải: Dùng bất đẳng thức phụ: $(x+y)^2 \geq 4xy$

Tacó $(a+b)^2 \geq 4ab$; $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ac$

$\Rightarrow (a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 = (8abc)^2 \Rightarrow$ (a + b)(b + c)(c + a) $\geq$ 8abc

Dấu "=" xảy ra khi a = b = c

ví dụ 2: Cho a > b > c > 0 và $a^2+b^2+c^2=1$ chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{1}{2}$$

Do a,b,c đối xứng , giả sử a ≥ b ≥ c $\Rightarrow\begin{cases}a^2\geq b^2\geq c^2\\ \frac{a}{b+c}\geq\frac{b}{a+c}\geq\frac{c}{a+b}\end{cases}$

áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\geq\frac{1}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ví dụ 3: Cho a,b,c,d > 0 và abcd =1 .Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$$

Ta có $a^2+b^2\geq 2ab$; $c^2+d^2\geq 2cd$

Do abcd =1 nên cd $=\frac{1}{ab}$ (dùng $x+\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2}$)

Ta có $a^2+b^2+c^2\geq 2(ab+cd)=2(ab+\frac{1}{ab})\geq 4$ (1)

Mặt khác: $a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)$ = (ab + cd) + (ac + bd) + (bc + ad)

$$=\left(ab+\frac{1}{ab}\right)+\left(ac+\frac{1}{ac}\right)+\left(bc+\frac{1}{bc}\right)\geq 2+2+2\Rightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2+d^2+a(b+c)+b(c+d)+d(c+a)\geq 10$$

ví dụ 4: Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$

Giải: Dùng bất đẳng thức Bunhiacopski

Xét cặp số (1,1,1) và (a,b,c) ta có $(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (1.a+1.b+1.c)^2$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$$

(đpcm)

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c

4) Phương pháp 4: dùng tính chất của tỷ số

A. Kiến thức

1) Cho a, b ,c là các số dương thì

a – Nếu $\frac{a}{b}>1$ thì $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$ b – Nếu $\frac{a}{b}<1$ thì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

2) Nếu b,d >0 thì từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

B. Các ví dụ:

ví dụ 1: Cho a,b,c,d > 0 .Chứng minh rằng :

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$$

Theo tính chất của tỉ lệ thức ta có $\frac{a}{a+b+c}<1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (1)

Mặt khác : $\frac{a}{a+b+c}>\frac{a}{a+b+c+d}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$ (3)

Tương tự ta có : $\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{a+b+c+d}$ (4)

$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{b+c}{a+b+c+d}$ (5); $\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{a+b+c+d}$ (6)

cộng vế với vế của (3); (4); (5); (6) ta có

$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2$ (đpcm)

<u>ví dụ 2</u> : Cho: $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ và b,d > 0

Chứng minh rằng $\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$

<u>Giải:</u> Từ $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{cd}{d^2}$ $\Rightarrow\frac{ab}{b^2}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{cd}{d^2}=\frac{c}{d}$ $\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{ab+cd}{b^2+d^2}<\frac{c}{d}$ (đpcm)

<u>ví dụ 3</u> : Cho a;b;c;d là các số nguyên dương thỏa mãn : a + b = c+d =1000

tìm giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$

<u>giải :</u> Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c}\le\frac{b}{d}$ $\Rightarrow\frac{a}{c}\le\frac{a+b}{c+d}\le\frac{b}{d}$; $\frac{a}{c}\le 1$ vì a + b = c + d

a, Nếu: b ≤ 998 thì $\frac{b}{d}\le 998$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}\le$ 999

b, Nếu: b = 998 thì a =1 $\Rightarrow\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{1}{c}+\frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d = 1; c = 999

Vậy: giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ = 999 + $\frac{1}{999}$ khi a = d = 1; c = b = 999