Cõu 15. Giải phương trõnh $2\cos^2 x+3\sin x-3=0$ với $0<x<\frac{\pi}{2}$

Giải:

$2\cos^2 x+3\sin x-3=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2 x\right)+3\sin x-3=0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. ,k\in\mathbb{Z}.$$

Do $0<x<\frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 16. Tìm m để phương trình $\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=m$ có nghiệm.

Giải:

$0\le\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 0\le m\le 1$.

Vậy với $0\le m\le 1$ thì phương trình có nghiệm.

Cõu 17. Giải phương trõnh $\sin^2 x-\sin x=0$ với $0<x<\pi$:

Giải:

$$\sin^2 x-\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.;k\in\mathbb{Z}$$

TH1. $x=k\pi;k\in\mathbb{Z}$. Vì $0<x<\pi$ nên $0<k\pi<\pi\Leftrightarrow 0<k<1\Rightarrow \nexists k$.

TH2. $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;k\in\mathbb{Z}$.

Vì $0<x<\pi$ nên $0<\frac{\pi}{2}+k2\pi<\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{1}{4}\Rightarrow k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

Cõu 18. Giải phương trõnh $\sin^2 x + \sin x = 0$ với $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Giải:

Ta có $\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. ; k \in \mathbb{Z}$.

TH1. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} < k\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$.

TH2. $x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$

Vì $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < k < -1; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \nexists k$.

Mà $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 0.$

Cõu 19. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 3x.\cos x = \sin 2x$ thuộc $(0; 2\pi)$

Cõu 20. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x \cos 2x$ thuộc $[0; \pi]$

Giải:

$\sin 3x - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x = 2\sin x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 3x - \frac{1-\cos 2x}{\sqrt{3}} = \sin(-x) + \sin 3x$

$\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{\sqrt{3}} = \sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$$

Xet trờn $[0;\pi]$, phương trình đã cho có 4 nghiệm lồn lượt là $\left\{0;\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\pi\right\}$.

Cõu 21. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 5x\cos 3x = \sin 7x\cos 5x$ thuộc $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Ta có $\sin 5x\cos 3x = \sin 7x\cos 5x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 8x = \sin 2x + \sin 12x$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 12x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{10} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Trong $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ phương trình đã cho có các nghiệm là: $0;\frac{\pi}{20};\frac{2\pi}{20};\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{20};\frac{9\pi}{20};\frac{\pi}{2}$.

Câu 22. Tìm m để phương trình $2sin^2 x - (2m+1)sinx + m = 0$ có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Giải:

Với $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \Rightarrow -1 < \sin x < 0$

$$2sin^2x - (2m+1)sinx + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = m \end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right) \Rightarrow -1 < \sin x < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0.$

Câu 23. Giải phương trình $2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-5=0$ với $\left(-\frac{3\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Giải:

$$2\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{5}{2}(Loai) \end{array}\right..$$

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k2\pi \quad \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Theo đề ra $-\frac{3\pi}{2} < x = -\frac{\pi}{6}+k\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < k < \frac{5}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1 \\ k=0 \\ k=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{7\pi}{6} \\ x=-\frac{\pi}{6} \\ x=\frac{5\pi}{6} \end{array}\right..$

Cõu 24. Tõm tất cả cỏc nghiệm của phương trõnh $\sin 8x+\cos 4x = 1+2\sin 2x.\cos 6x$ thuộc $(-\pi;\pi)$

Giải:

$\sin 8x + \cos 4x = 1 + 2\sin 2x.\cos 6x$

$\Leftrightarrow \sin 8x + \cos 4x = 1 + 2.\dfrac{1}{2}\left(\sin 8x + \sin\left(-4x\right)\right)$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \sin 4x = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(4x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \dfrac{\pi}{4} = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Các nghiệm thuộc khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ của phương trình là: $\left\{-\dfrac{\pi}{2};0;\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{8};\dfrac{5\pi}{8};-\dfrac{3\pi}{8};-\dfrac{7\pi}{8}\right\}$.

Cõu 25. Tỡm tất cả cỏc nghiệm của phương trỡnh $\dfrac{\sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x}{\sin x} = 0$ thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$

Giải:

Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\dfrac{\sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x}{\sin x} = 0$

$\Rightarrow \sqrt{3}\sin 3x - 2\sin x.\sin 2x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x - 2.\dfrac{-1}{2}\left(\cos 3x - \cos x\right) - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 2\cos x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 3x\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} + 3x = \dfrac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \dfrac{\pi}{6} + 3x = \pi - \dfrac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Các nghiệm thuộc $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ của phương trình là: $\dfrac{\pi}{12};-\dfrac{5}{12}\pi;\dfrac{1}{6}\pi.$

Cõu 26. Tỡm tất cả cỏc nghiệm của phương trỡnh $\sin 3x-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2\sin x\cos 2x$ thuộc đoạn $\left[0;2\pi\right]$?

Giải:

$$\sin 3x-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2\sin x\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3\mathrm{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin^2 x=2.\frac{1}{2}\left(\sin 3\mathrm{x}+\sin\left(-x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin^2 x+\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$$

Cõu 27. Vậy các nghiệm thuộc $\left[0;2\pi\right]$ của phương trình là: $0;\pi;2\pi;\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}$. Tỡm nghiệm của phương trỡnh $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\dfrac{3}{2}$ trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x\left(2\cos 2x+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{4} \\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ là: $\dfrac{\pi}{8},\ \dfrac{3\pi}{8},-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}$

Cõu 28. Tỡm nghiệm của phương trỡnh $\sin 2x+\sin x-\dfrac{1}{2\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$ trong khoảng $(0;\,\pi)$.

Giải

$\sin 2x+\sin x-\dfrac{1}{2\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$ (1), điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x\sin x-\cos x-1=2\cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x-1+\cos x(2\sin^2 x-1)=2\cos 2x$$
$$\Leftrightarrow -\cos^2 2x+\cos 2x.\cos x-2\cos 2x=0$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x+\cos x+2)=0$$
$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 x+\cos x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ 2\cos^2 x+\cos x+1=0\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thuộc $(0;\,\pi)$ là $x=\dfrac{\pi}{4};x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Cõu 29. Phương trình $\cos 22x+3\cos 18x+3\cos 14x+\cos 10x=0$ cú bao nhiờu nghiệm thuục khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Giải

$$\cos 22x+3\cos 18x+3\cos 14x+\cos 10x=0$$
$$\Leftrightarrow (\cos 22x+\cos 10x)+3(\cos 18x+\cos 14x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x(\cos 6x+\cos 2x+2\cos 2x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x(\cos 6x+\cos 2x+2\cos 2x)=0$$
$$\Leftrightarrow 2\cos 16x(2\cos 4x\cos 2x+2\cos 2x)=0$$
$$\Leftrightarrow 8\cos 16x.\cos^3 2x=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{32}+k\dfrac{\pi}{16}\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy các nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn: