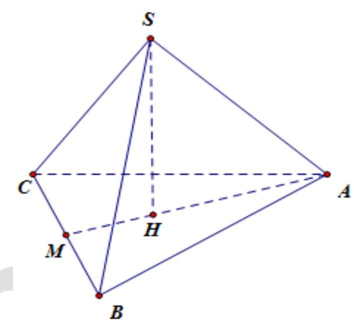
ĐÁP ÁN ĐỀ MINH HỌA 19

Câu 1. Vì $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{OA}=\vec{0}\Rightarrow SB\perp OA$. Chọn **A.**

Câu 2.



Gọi H là hình chiếu của S xuống mặt phẳng (ABC).

Gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\Delta SHA=\Delta SHB=\Delta SHC$

$\Rightarrow HA=HB=HC$.

Vậy H là tâm của tam giác $ABC\Rightarrow \angle\left(SA,(ABC)\right)=\angle SAH$

Tính :

$$HA=\frac{2MA}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \cos(\angle SAH)=\frac{HA}{SA}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \angle\left(SA,(ABC)\right)=\angle SAH=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$. Chọn **C**.

Câu 3. Ta có: $y'=3x^2-3\to y'=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Hai điểm cực trị là $(1;-1)$ và $(-1;3)$.

Phương trình đường thẳng cực trị là $2x+y-1=0$. Chọn **A**. Có thể thực hiện phép chia y cho y' nhưng ở đây các điểm cực trị "rất đẹp" nên có thể thay vào ngay.

Câu 4. Đặt $z_0=-4+i$. Điểm M,N lần lượt là biểu diễn của số phức z,z_0 trên mặt phẳng phức. Khi đó $MN=|z-i+4|=2$ hay M cách điểm N cố định một khoảng cách không đổi. Vậy quỹ tích cần tìm là đường tròn tâm N bán kính $R=2$, tránh nhầm hình tròn (chứa thêm các điểm bên trong).

Câu 5. $2=\int_1^t\left(4x^3-2x\right)dx=\left(x^4-x^2\right)\Big|_1^t\Leftrightarrow t^4-t^2-2=\left(t^2-2\right)\left(t^2+1\right)=0\Leftrightarrow t=\pm\sqrt{2}$. Chọn **B**.

Câu 6. Điều kiện : $0<x\neq1$. $PT\Leftrightarrow \log_x 2+\log_x 5=\log_x 10=\frac{1}{100}\Leftrightarrow x^{\frac{1}{100}}=10\Leftrightarrow x=10^{100}$

Câu 7. TXĐ của hàm số: $x^2-4x-12>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>6\\x<-2\end{array}\right.$

Ta có: $y'=\dfrac{2x-4}{\left(x^2-4x-6\right)\ln\frac{1}{3}}$. Hàm số đã cho đồng biến khi $y'\geq0$ (chú ý nếu có $y'=0$ thì chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm)

$\Leftrightarrow x\leq2$ vì $\ln\frac{1}{3}<0$. Đối chiếu điều kiện $\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$. Chọn **B.**

Câu 8. Với z_1, z_2 là nghiệm phức của tam thức bậc 2 thì $z_2 = \overline{z_1} \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{z_1 z_2} = 2$. Chọn **B**.

Câu 9.

(I) đúng, đây là câu lý thuyết cơ bản, ngoài ra, ta còn biết quỹ tích của các tiếp điểm là một đường tròn.

(III) đúng: Xét trường hợp tổng quát với hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$, gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và H là hình chiếu của O lên mặt đáy $A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta có các tam giác vuông $\Delta OHA_1 = \Delta OHA_2 = \Delta OHA_3 = ... = \Delta OHA_n$

$\Rightarrow HA_1 = HA_2 = HA_3 = ... = HA_n$ hay đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nội tiếp đường tròn tâm H.

(IV) đúng. Xét trường hợp tổng quát với hình chóp $S.A_1A_2A_3...A_n$, gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp có bán kính r và H là giao điểm của SO với mặt đáy $A_1A_2A_3...A_n$.

Khi đó:

$$\frac{SO}{SH} = \frac{r}{d\left(H,\left(SA_1A_2\right)\right)} = \frac{r}{d\left(H,\left(SA_2A_3\right)\right)} = ... = \frac{r}{d\left(H,\left(SA_nA_1\right)\right)}$$

$\Rightarrow d\left(H,\left(SA_1A_2\right)\right) = d\left(H,\left(SA_2A_3\right)\right) = ... = d\left(H,\left(SA_nA_1\right)\right)$ hay điểm H cách đều tất cả các mặt bên của hình chóp.

(II) sai vì chưa chắc đường thẳng này đi qua tiếp điểm giữa mặt phẳng với mặt cầu.

Vậy có tất cả 3 nhận định đúng. Chọn **C**.

Câu 10. $\int\limits_{-1}^{1}\left(3f\left(x+2\right)+1\right)dx = 3\int\limits_{1}^{3} f\left(x+2\right)d\left(x+2\right) + \int\limits_{-1}^{1} dx = 3\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)d\left(x\right) + x\Big|_{-1}^{1} = 3m+2$.

Chọn **D**.

Câu 11. Phương trình mặt phẳng song song với $(P): x - y + z + 2 = 0$ là:

$(Q): x - y + z + m = 0$. Lấy điểm M bất kì trên (Q), ta cần $d\left(M,(P)\right) = 3$.

Để đơn giản ta sẽ lấy

$$M(0;0;-m) \Rightarrow d\left(M,(P)\right) = \frac{\left|0-0+(-m)+2\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 11 \\ m = -7 \end{array}\right.$$. Chọn **C**.

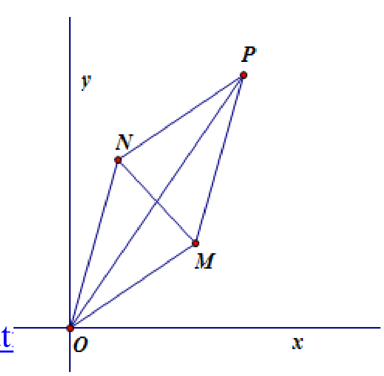
Câu 12. $\log_{ab} a + \log_{ab} b = 1 \Rightarrow \log_{ab} b = -3 \Rightarrow \log_{ab}\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\log_{ab} a}{3} - \frac{\log_{ab} b}{2} = \frac{4}{3} - \frac{-3}{2} = \frac{17}{6}$.

Chọn **A**.

Câu 13.

Dựng hình bình hành $OMPN$ trong mặt phẳng phức, khi đó biểu diễn của :

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = OP \\ |z_1 - z_2| = MN \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2|\cos\left(150^0\right)} = 1 \\ |z_1-z_2| = \sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||z_2|\cos\left(30^0\right)} = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left|\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right| = \dfrac{|z_1+z_2|}{|z_1-z_2|} = 1$. Chọn **B**.

Câu 14. Một hàm số bất kì chỉ có tối đa 2 tiệm cận ngang, đó là khi đồng thời tồn tại các giá trị hữu hạn của các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} y$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ và chúng khác nhau. Chọn **C**.

Câu 15. Gọi R là bán kính của k quả bóng bàn đựng trong hộp và đồng thời của là bán kính đáy của chiếc hộp hình trụ. Vì hộp đựng vừa khít các quả bóng nên chiều cao của hộp phải là bội số của bán kính, hay $h = k2R$. Khi đó:

+ Tổng diện tích bề mặt của các quả bóng:

$S_1 = k4\pi R^2$

+ Diện tích xung quanh của hộp:

$S_2 = 2\pi Rh = 2\pi R(k2R) = 4\pi kR^2$

$\Rightarrow S_2 = S_1 = 12 \text{ cm}^3$. Chọn **C**.

Câu 16. $\log_a\left(a^{2x^2+4x}+a^2\right) = x^2+2x+\log_a\left(a^2+1\right) \Leftrightarrow \log_a\left(\dfrac{a^{2x^2+4x}+a^2}{a^2+1}\right) = x^2+2x$

$$\Leftrightarrow a^{x^2+2x} = \frac{a^{2x^2+4x}+a^2}{a^2+1} \Leftrightarrow \left(a^{x^2+2x}\right)\left(a^2+1\right) = \left(a^{x^2+2x}\right)^2 + a^2$$

Đặt $t = a^{x^2+2x}$ ta thu được phương trình:

$t\left(a^2+1\right) = t^2+a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 = a^0 \\ t = a^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+2x = 0 \\ x^2+2x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$. Chọn **D**.

Câu 17. $\displaystyle\int\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 dx = \int\left(\tan^2 x + \cot^2 x + 2\right)dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 + \frac{1}{\sin^2 x} - 1 + 2\right)dx = \tan x - \cot x + C$$

$$\Rightarrow \int x\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)^2 dx = x(\tan x - \cot x) - \int(\tan x - \cot x)dx$$

$$= x(\tan x - \cot x) - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx + \int\frac{\cos x}{\sin x}dx$$

$= x(\tan x - \cot x) + \displaystyle\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int\frac{d(\sin x)}{\sin x} = x(\tan x - \cot x) + \ln(\sin x\cos x) + C$. Chọn **A**.

Câu 18. Để ý rằng $M(1;2;0) \in (Oxy)$ nên dễ dàng thấy khoảng cách từ M đến Oz bằng

$OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5} = R$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 5$. Chọn **A**.

Câu 19.

(1) đúng vì $f(x) = 0$ có bậc lẻ nên luôn có nghiệm và là bậc 3 nên tối đa 3 nghiệm thực.

(2) sai vì vẫn có thể xảy ra trường hợp đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nhưng nằm về cùng một phía so với Ox, khi đó $f(x) = 0$ cũng vẫn chỉ có duy nhất 1 nghiệm.

(3) sai vì còn trường hợp $ax^2 + mx + n$ có 2 nghiệm phân biệt, trong đó 1 nghiệm là x_0.

(4) sai vì tích tung độ của 2 điểm cực trị không âm thì vẫn có thể xảy ra trường hợp bằng 0, tức sẽ có 1 điểm cực trị nằm trên Ox hay vẫn có thể xảy ra trường hợp phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

(5) đúng vì khi đó sẽ xảy ra $f'(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ hoặc $f'(x) \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

(6) đúng, chú ý điều kiện tương đương là cần phải có $b = d = 0$ tuy nhiên ở đây ta dùng từ "thì" nên nhận định này vẫn đúng. Vậy có tất cả 3 nhận định sai. Chọn **C**.

Câu 20.

Sai ở bước (IV), để có thể xảy ra $\log_2(\log_3 x) > \log_3(\log_3 x)$ thì $\log_3 x > 1$, ở đây không có được điều đó. Chọn **C**.

Câu 21.

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$, H là tâm hình vuông $ABCD$

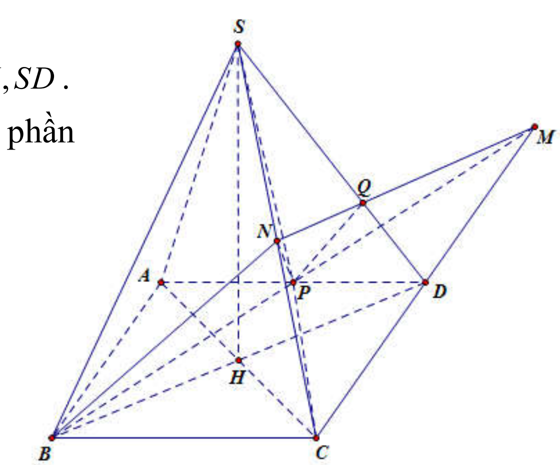
$\Rightarrow \angle(SD,(ABCD)) = \angle SDH = 60^0$

$\Rightarrow SH = HD\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{SH \times S_{ABCD}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của BM, AD và MN, SD.

Do đó mặt phẳng (BMN) chia khối chóp thành hai phần là $S.ABNQP$ và $NQPBCD$.



Xét tam giác MBC có $PD \parallel BC$ và $DM = DC \Rightarrow PA = PD$

$\Rightarrow S_{ABP} = \dfrac{S_{ABCD}}{4} \Rightarrow V_{S.ABP} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{4}$

Tương tự: $V_{S.BPN} = \dfrac{SN}{SC} \times V_{S.PBC} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{4}$

và $V_{S.PQN} = \dfrac{SN}{SC} \times \dfrac{SQ}{SD} \times V_{S.PCD} = \dfrac{V_{S.ABCD}}{12}$

$$\Rightarrow V_{S.ABNQP} = V_{S.ABP} + V_{S.PBN} + V_{S.PQN} = \frac{7}{12} \times V_{S.ABCD}.$$

Vậy chênh lệch độ lớn thể tích giữa hai phần là:

$\left(\frac{7}{12} - \frac{5}{12}\right) \times V_{S.ABCD} = \frac{V_{S.ABCD}}{6} = \frac{a^3\sqrt{6}}{36}$. Chọn **A**.

Câu 22.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\left(\tan^2 x + 1 - 1\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} xdx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} xd\left(\tan x\right) = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan xdx$$

$$= x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}dx = \left(x\tan x + \ln\cos x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi^2}{18}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x\tan^2 xdx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2 - \frac{\pi^2}{18} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = -\frac{1}{18} \end{cases} \Rightarrow a + b + \frac{1}{c} = -16.$$ Chọn **D**.

Câu 23. PTHĐGĐ:

$$x^4 - m^2x^2 + 3 = \left(1 - m^2\right)x + 3 \Leftrightarrow x\left(x-1\right)\left(x^2 + x + 1 - m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x^2 + x + 1 - m^2 = 0 \end{array}\right.$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 - m^2x^2 + 3$ cắt đường thẳng $y = \left(1 - m^2\right)x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2 + x + 1 - m^2 = 0$ có duy nhất 1 nghiệm khác 0 và 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1^2 - 4\left(1 - m^2\right) = 0 \\ 1^2 + 1 + 1 - m^2 \neq 0 \\ 0^2 + 0 + 1 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Chọn **B**.

Câu 24. Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 0 < x^2 + x \neq 1 \end{cases}$. $PT \Leftrightarrow x^2 + x = 2x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Chỉ có nghiệm $x = 1$ thỏa điều kiện. Chọn **B**.

Câu 25. Gọi $G\left(1;1;2\right)$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ta có :

$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+GA^2+GB^2+GC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

Như vậy, cần tìm vị trí $M\in(P)$ để $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất thì MG nhỏ nhất.

Mà $MG\geq d\left(G,(P)\right)$ nên M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng (d) qua G vuông góc với (P) nhận vecto pháp tuyến của (P) làm vecto chỉ phương nên có phương trình là: $x-1=1-y=z-2\Rightarrow M(m+1;1-m;m+2)$.

Do $M=(d)\cap(P)$ nên:

$$m+1-(1-m)+(m+2)=0\Leftrightarrow m=-\frac{2}{3}\Rightarrow M\left(\frac{1}{3};\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow OM=\frac{\sqrt{42}}{3}$$. Chọn **A**.

Câu 26. Đồ thị của hàm số bậc 4 bất kì sẽ có tối đa 3 điểm cực trị. Như đã biết, để vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ ta có thể lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên dưới và giữ nguyên phần đồ thị nằm ở trên trục Ox của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Trường hợp đồ thị của hàm số $y=|f(x)|$ sẽ có nhiều điểm cực trị nhất là khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị và nằm ở 2 phía so với trục Ox, có tối đa 7 điểm. Chọn **C**.

Câu 27. Giả sử có một điểm $M\left(x,\ln(x-1)\right)$ nằm trên đồ thị của hàm số $f(x)$ thì điểm đối xứng với M qua O sẽ có tọa độ $N\left(-x,-\ln(x-1)\right)$ (hoành độ và tung độ của M,N đều đối nhau) hay $N\left(-x,-\ln\left(-(-x)-1\right)\right)$

$\Rightarrow g(x)=-\ln(-x-1)=-\ln(x+1)$

$\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{x+1}\Rightarrow g'(2016)=-\frac{1}{2017}$. Chọn **C**.

Câu 28. Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sqrt[2017]{\cos t}-\sqrt[2017]{\sin t})dt=-I\Rightarrow I=0$. Chọn **A**.

Câu 29. Ta có $y>0\Rightarrow y^2=4+2\sqrt{4-x^2}\Rightarrow 4\leq y^2\leq 4+2\sqrt{4}=8\Leftrightarrow 2\leq y\leq 2\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow ab=4\sqrt{2}$$

Chọn **C.**

Câu 30.

Xét điểm $M(1;1;m)\in d$. Vì

$$d\subset(P)\Rightarrow M\in(P):2+m-\left(m^2+1\right)m+m-2m^2=0\Leftrightarrow m^3+2m^2-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=-2\end{array}\right.$$

Mặt khác, khi $d \subset (P) \Rightarrow \overrightarrow{u_P}\overrightarrow{v_d} = \vec{0} \Leftrightarrow m^2 + 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Câu 31. Lấy $A(1;-1;0)$. Vì (d') đối xứng với (d) qua M nên $(d)//(d')$ và đối xứng của A qua M thuộc (d').

Gọi B là ảnh của A đối xứng qua M. Khi đó M cũng là trung điểm của AB.

$\Rightarrow B(-1;5;2) \Rightarrow (d'): \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{1} = z-2$. Chọn **A**.

Câu 32.

$$64^{\frac{1}{7x-4}} = \sqrt[x^2-x+4]{4} \Rightarrow 4^{\frac{3}{7x-4}} = 4^{\frac{1}{x^2-x+1}} \Rightarrow \frac{3}{7x-4} = \frac{1}{x^2-x+1} \Rightarrow 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{3} \end{array}\right.$$

Tuy nhiên, ta cần chú ý rằng nếu viết $a^{\frac{1}{b}}$ thì chỉ cần $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ nhưng khi viết $\sqrt[b]{a}$ thì b phải là số nguyên dương và $b \ge 2$. Do đó cả 2 nghiệm trên đều không thỏa. Vậy phương trình này vô nghiệm.

Câu 33. Ta có nhận xét rằng đồ thị hàm số đã cho chỉ có thể có đường tiệm cận đứng hoặc đường tiệm cận ngang vì bậc tử không lớn hơn bậc mẫu. Mặt khác, đồ thị hàm số đã cho luôn có đường tiệm cận đứng vì:

+ Xét $m \ne -\dfrac{2}{9} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^-} y = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{9m+2}}{x-3} = +\infty$

+ Xét $m = -\dfrac{2}{9} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} y = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{-\dfrac{2x^2}{9}+2}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} -\dfrac{\sqrt{2(x+3)}}{3\sqrt{3-x}} = -\infty$

Bài toán đưa về cần tìm m để đồ thị hàm số đã cho không có nhiều hơn 1 đường tiệm cận ngang.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{m+\dfrac{2}{x}}}{1-\dfrac{3}{x}}$. Như vậy nếu $m \ge 0$ thì ta luôn có đường TCN $y=\sqrt{m}$. Tương tự xét $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ ta cũng thấy nếu $m \ge 0$ thì ta luôn có đường TCN $y=-\sqrt{m}$.

Vậy để đồ thị hàm số có không quá 2 đường tiệm cận thì $m \le 0$. Chọn **C**.

Câu 34. Đặt $z = a+bi$ với $a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = a-bi$.

Từ $|a+bi-(a-bi)| = |2bi| = 2|b| = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}$

$\dfrac{z}{\overline{z}} = \dfrac{z^2}{z\overline{z}} = \dfrac{z^2}{|z|} = \dfrac{a^2-b^2+2abi}{|z|} \in \mathbb{R} \Rightarrow a=0 \Rightarrow |z| = \sqrt{3}$. Chọn **B**.

Câu 35. $AE = BC = a$ và $AE // BC$ nên tứ giác $AECB$ là hình vuông. Suy ra tam giác ECD vuông cân tại E. Ta có: $SA \perp CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SED)$. Như vậy tứ diện $SCDE$ có $CE \perp (SED)$. Đường cao $CE = AB = a$, bây giờ ta chỉ cần tính bán kính R_0 của đường tròn ngoại tiếp tam giác SED.

$S_{SED} = \frac{S_{SAD}}{2} = \frac{SE.ED.SD}{4R_0} \Rightarrow R_0 = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow R = \sqrt{\left(\frac{CE}{2}\right)^2 + R_0^2} = \frac{a\sqrt{11}}{2}$. Chọn **D**.

Câu 36.

$A = \frac{\ln 3}{\ln 2} \times \frac{\ln 4}{\ln 3} \times \frac{\ln 5}{\ln 4} \times ... \times \frac{\ln 2017}{\ln 2016} = \frac{\ln 2017}{\ln 2} = \log_2 2017$

$B = \log\left(\tan 1^0.\tan 89^0\right) + \log\left(\tan 2^0.\tan 88^0\right) +$

$+ \log\left(\tan 3^0.\tan 87^0\right) + ... + \log\left(\tan 44^0.\tan 46^0\right) + \log\left(\tan 45^0\right)$

$= 45\log 1 = 0$

$\Rightarrow A + 1999B = \log_2 2017$. Chọn **A**.

Câu 37.

(1) sai vì cần thêm giả thiết $f(x) = 0$ tại hữu hạn $x \in K$

(2) sai vì có đạo hàm thì liên tục nhưng liên tục chưa chắc có đạo hàm.

(3) sai vì nghịch biến trên K không có nghĩa là sẽ tồn tại đạo hàm tại tất cả các điểm trên K, do đó vẫn có khả năng tồn tại các điểm không vẽ được tiếp tuyến.

(4) sai vì $f(x+1)$ không thể suy tính đồng biến ra từ $f(x)$.

(5) đúng.

(6) sai vì hàm $f(x)$ không liên tục thì đồ thị của nó cũng không cắt Ox.

Vậy chỉ có 1 nhận định đúng.

Chọn **D**.

Câu 38. $\begin{cases} M \in (d_1): \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1} \\ N \in (d_2): \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} M(2-m; m+3; m+4) \\ N(2n+1; n-2; 2-2n) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (2n+m-1; n-m-5; -2-2n-m)$

Vì $(d) // (P)$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_P} = 0$ với $\overrightarrow{n_P} = (1;-1;1)$ là vecto pháp tuyến của $(P) \Leftrightarrow m = n-2$

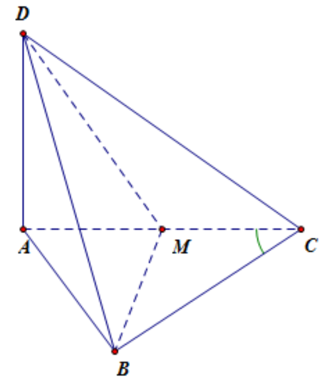
Thay vào điều kiện $MN = 3\sqrt{6}$ tìm được phương trình đường thẳng là: $x - 2 = 3 - y = \frac{z-4}{2}$.

Chọn **D**.

Câu 39.

Gọi H là hình chiếu của D xuống mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow AD \geq HD$

Ta có:



$$9 = AD + BC + \frac{AC\sqrt{3}}{2} \geq AH + BC + AC.\sin\widehat{ACB}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{AH.BC.AC.\sin\widehat{ACB}} = 3.\sqrt[3]{6V_{ABCD}} = 3$$

Do đó: $AD \perp (ABC)$ và

$$AD = BC = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} AC = 2\sqrt{3} \\ BC = 3 \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{21 - 6\sqrt{3}}$$

Câu 40. Đặt $t = x^2 \Rightarrow t^2 - 4t + |\log_3 a| + 3 = 0 \quad (1)$.

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta' = 4 - (|\log_3 a| + 3) > 0 \\ |\log_3 a| + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq |\log_3 a| < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_3 a < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < a < 3 \end{cases}$$. Chọn **D**.

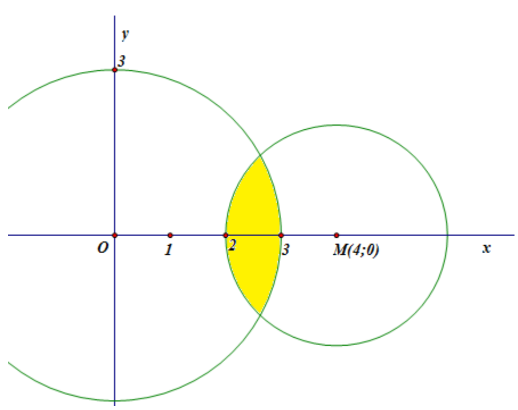
Đối với bài này theo thói quen sẽ đưa về tương giao giữa 2 đồ thị sẽ gây rối khi hàm $\log_3 a$ là đường cong.

Câu 41. Xét trong mặt phẳng phức, với các điểm M là biểu diễn của số phức z và $A(4;0)$, $B(1;4)$.

Dựa vào đề bài ta có $AM = BM = 2$ hay M nằm trên đường trung trực của A,B và cách A,B một khoảng bằng 2.

Tuy nhiên, để ý rằng $AB = 5 \Rightarrow MA = MB \geq \frac{AB}{2} = 2,5$. Do đó, không tồn tại số phức nào thỏa mãn đề bài. Chọn **A**.

Câu 42. Diện tích mặt cỏ ăn chung sẽ lớn nhất khi 2 sợi dây được kéo căng và là phần giao của 2 đường tròn.



Xét hệ trục tọa độ như hình vẽ, gọi O,M là vị trí của cọc. Bài toán đưa về tìm diện tích phần được tô màu.

Ta có phương trình đường tròn tâm $(O): x^2 + y^2 = 3^2$ và phương trình đường tròn tâm $(M): (x-4)^2 + y^2 = 2^2$

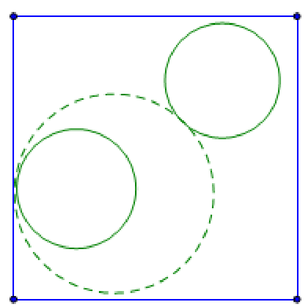
Phương trình các đường cong của đường tròn nằm phía trên trục Ox là: $y = \sqrt{9 - x^2}$ và $y = \sqrt{4 - (x-4)^2}$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{4-(x-4)^2} = \sqrt{9-x^2} \Leftrightarrow 4 + 8x - 16 = 9 \Leftrightarrow x = \dfrac{21}{8}$

Diện tích phần được tô màu là: $S = 2\left[\int_{2}^{\frac{21}{8}} \sqrt{4-(x-4)^2}\,dx + \int_{\frac{21}{8}}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx\right] \approx 1,989$. Ta có thể giải tích phân này bằng phép thế lượng giác, tuy nhiên để tiết kiệm thời gian nên bấm máy. Chọn **C**.

Câu 43. Gọi r_1, r_2 là bán kính của 2 hình tròn được cắt. Ta có nhận xét rằng:

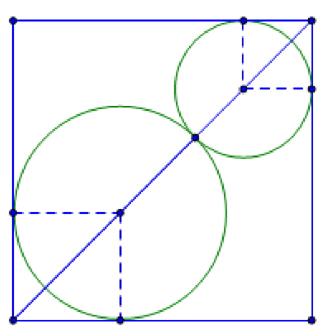
+ 2 đường tròn này phải tiếp xúc nhau vì nếu chưa tiếp xúc thì chúng vẫn còn “khoảng trống” để phóng to lên.



+ tương tự như vậy, 2 đường tròn này phải tiếp xúc với các cạnh của hình vuông và mỗi đường tròn phải tiếp xúc tối thiểu 2 cạnh (vì nếu chỉ tiếp xúc 1 cạnh thì vẫn còn “không gian” để “phóng to” lên).

+ 2 cạnh mà đường tròn thứ nhất tối thiểu tiếp xúc và 2 cạnh mà đường tròn thứ 2 tối thiểu tiếp xúc phải khác nhau hay nói cách khác, 4 cạnh đó đủ 4 cạnh của hình vuông.

Như vậy, khi đó ta có hình dạng của 2 đường tròn chứa các tính chất đã nêu như hình vẽ:



Để đơn giản, giả sử cạnh hình vuông bằng 1. Tổng diện tích của 2 hình tròn là $S=\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$. Bài toán đưa về:

Tìm GTLN của biểu thức: $P=r_1^2+r_2^2$ biết $r_1+r_1\sqrt{2}+r_2+r_2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ và $0<r_1,r_2\le\frac{1}{2}$

Từ $r_1+r_1\sqrt{2}+r_2+r_2\sqrt{2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow r_1+r_2=2-\sqrt{2}$. Thay vào:

$P=r_1^2+r_2^2=r_1^2+\left(2-\sqrt{2}-r_1\right)^2=2r_1^2-r_1\left(2-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)^2=f\left(r_1\right)$

$\Rightarrow f'\left(r_1\right)=4r_1-\left(2-\sqrt{2}\right)\to f'\left(r_1\right)=0\Leftrightarrow r_1=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\Rightarrow f\left(r_1\right)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Khi $r_1=\frac{1}{2}$ thì $r_2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{k}=\frac{r_2}{r_1}=\sqrt{2}-1$ vì $\left(k\le1\right)$

Ta có thể không cần xét hàm $f\left(r_1\right)$ vì nó chỉ là tam thức bậc 2, dễ dàng xác định trục là $x=-\frac{b}{2a}$. Chọn **B**.

Câu 44. Đặt $z=a+bi\to z^2=\left|z^3\right|\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi-\left|z^3\right|=0\Leftrightarrow\begin{cases}2xy=0\\x^2-y^2-\left|z^3\right|=0\end{cases}$

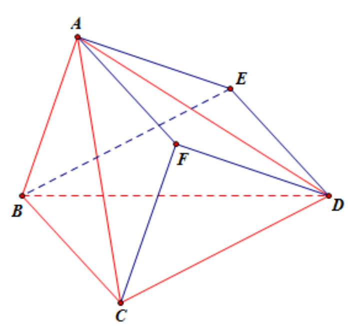
Với $x=0\Rightarrow y^2+\left|z^3\right|=0\Leftrightarrow z=0$

Với $y=0\Rightarrow z=x\Rightarrow x^2-x^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\end{array}\right.$

Vậy có tất cả 3 số phức thỏa yêu cầu đề. Chọn **C**.

Câu 45. Tổng số tiền nhận được: $1000000000\times\left(1+7\%\right)^{10}=1967151357$. Chọn **D**.

Câu 46.



Dựng hình bình hành $BCDE$ và hình bình hành $ABCE$, thu được lăng trụ $ABE.FCD$ như hình vẽ.

Ta có: $V_{ABCD}+V_{A.FCD}+V_{D.ABE}=V_{ABE.FCD}$

$\Leftrightarrow V_{ABCD}=V_{ABE.FCD}-\left(V_{A.FCD}+V_{D.ABE}\right)$

Mà $V_{A.FCD}=V_{D.ABE}=\frac{V_{ABE.FCD}}{3}\Rightarrow V_{ABCD}=\frac{V_{ABE.FCD}}{3}$

Vì $AB\,//\,CF\subset\left(CDF\right)\Rightarrow\begin{cases}d\left(AB,CD\right)=d\left(AB,\left(CFD\right)\right)=AF=\frac{4}{\sqrt{3}}\\\angle\left(AB,CD\right)=\angle\left(CF,CD\right)=\angle FCD=\frac{\pi}{6}\end{cases}$

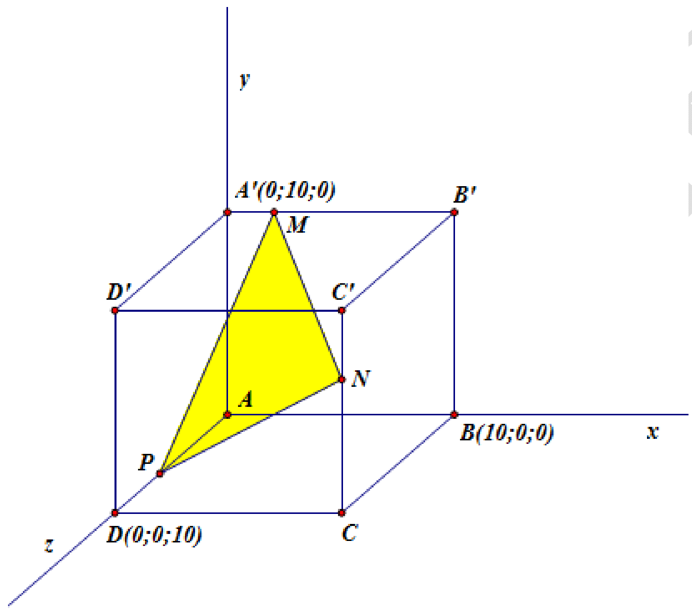
$$V_{ABE.FCE} = S_{FCD}.AF = \frac{1}{2}.CF.CD.\sin(\angle FCD).AF$$

$$= \frac{1}{2}.AB.CD.\sin(\angle FCD).AF = 2\sqrt{3} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Chọn **B**.

Câu 47. Bài toán này ta sẽ giải quyết bằng cách ứng dụng phương pháp tọa độ trong không gian.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Không mất tính tổng quát, và dựa vào yêu cầu về vị trí 3 con nhện ta xác định là các điểm M, N, P nằm trên các cạnh $A'B', CC', AD$ như hình vẽ.



Yêu cầu bài toán là cần tìm tọa độ của 3 điểm M, N, P để chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Đặt $M(x;10;0), P(0;0;z), N(10;y;10)$. Chu vi tam giác MNP là:

$$MN + NP + PQ = \sqrt{(x-10)^2 + (y-10)^2 + 10^2} + \sqrt{10^2 + y^2 + (z-10)^2} + \sqrt{x^2 + 10^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{(10-x)^2 + (y-10)^2 + 10^2} + \sqrt{y^2 + (z-10)^2 + 10^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 10^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức vecto :

$$\Rightarrow MN + NP + PM \geq \sqrt{(10-x+y)^2 + (y+z-20)^2 + 20^2} + \sqrt{z^2 + (-x)^2 + 10^2}$$

$$\geq \sqrt{(10-x+y+z)^2 + (y-10+z-10-x)^2 + (10+10+10)^2}$$

$$= \sqrt{2(y+z-x-5)^2 + 450 + (10+10+10)^2} \geq 15\sqrt{6}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} y+z-x=5 \\ \dfrac{10-x}{y}=\dfrac{y-10}{z-10}=\dfrac{10}{10} \\ \dfrac{10-x+y}{z}=\dfrac{y+z-20}{-x}=\dfrac{20}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ 2y-x=5 \Leftrightarrow x=y=z=5 \\ x+y=10 \end{cases}$

Vậy giá trị cần tìm là $15\sqrt{6}$. Chọn **A**.

Câu 48.

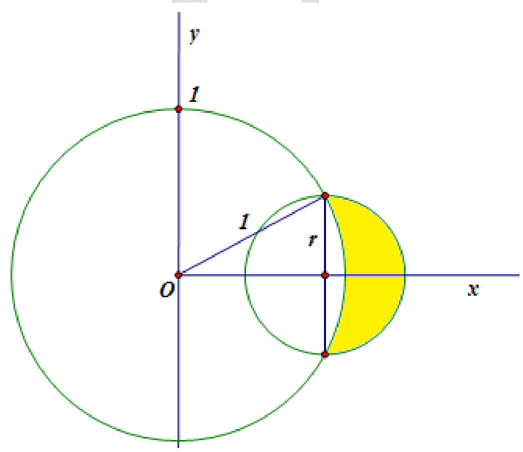
Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, với Ox đi qua tâm 2 mặt cầu, phần thể tích đề yêu cầu là thể tích của phần tô màu xoay quanh trục Ox.

Ta có phương trình của đường tròn lớn là $x^2+y^2=1$, trong đó đường cong nằm ở góc phần tư thứ nhất có phương trình $y=\sqrt{1-x^2}$.

Thể tích cần xác định là:

$$V=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)-\pi\int_{\sqrt{1-r^2}}^{1}\left(1-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)-\left(\pi x-\frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt{1-r^2}}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[2r^3+\left(2+r^2\right)\sqrt{1-r^2}\right]-\frac{2\pi}{3}$$



Xét hàm số $f\left(r\right)=2r^3+\left(2+r^2\right)\sqrt{1-r^2}$

với $0<r<1 \Rightarrow f'\left(r\right)=6r^2-\dfrac{3r^3}{\sqrt{1-r^2}}=\dfrac{3r^2\left(2\sqrt{1-r^2}-r\right)}{\sqrt{1-r^2}}$

$f'\left(r\right)=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-r^2}=r \Leftrightarrow r^2=\dfrac{4}{5} \Leftrightarrow r=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Lập bảng biến thiên hàm $f\left(r\right) \Rightarrow \underset{0<r<1}{\text{Max}}\, f\left(r\right)=f\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Câu 49. Ta có : $\begin{cases}\alpha+\beta=-z_1\\ \alpha\beta=z_2+m\end{cases}\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=(-z_1)^2-4(z_2+m)=z_1^2-4z_2-4m=16+20i-4m$

Theo đề thì $|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}\Leftrightarrow|4+5i-m|=7$

Gọi M là điểm biểu diễn của số phức m trên mặt phẳng phức. Từ $|4+5i-m|=7$ suy ra khoảng cách từ điểm M đến điểm $N(4;5)$ có khoảng cách không đổi là bằng 7 hay M thuộc đường tròn tâm N bán kính $R=7$

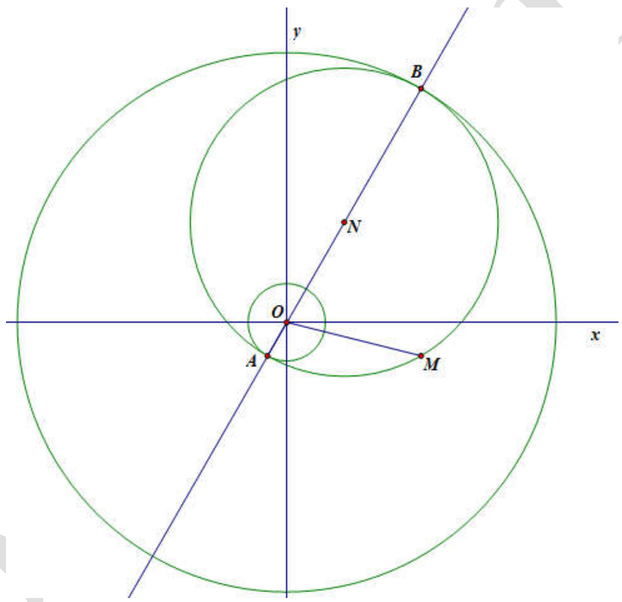
Cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|m|$ hay cũng chính là độ dài của OM .

Dựa vào hình ta có: $OA=R-ON\le OM$ vì M nằm ngoài $(O;OA)$ nếu $M\ne A$.

Tương tự $OB=R+ON\le OM$

$\Rightarrow R-ON\le OM\le ON+R\Leftrightarrow 7-\sqrt{41}\le OM\le 7+\sqrt{41}$

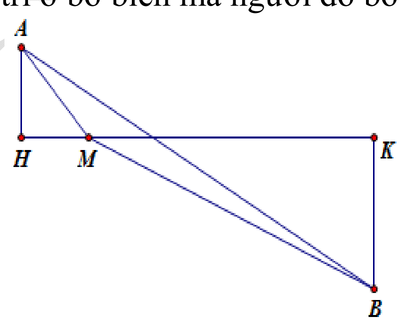
$\Rightarrow OA.OB=\left(7-\sqrt{41}\right)\left(7+\sqrt{41}\right)=8$



Câu 50.

Đưa các vị trí về như hình vẽ, dễ dàng tính được $HK=0,12$ km.

Gọi M là vị trí ở bờ biển mà người đó bơi vào.



Đặt $HM = x$, để tổng quát ta đặt $HK = d$, $AH = a$, $BK = b$, $v_1 = 15$ và $v_2 = 25$.

Khi đó tổng thời gian để vị khách đi từ A đến B là : $t = f(x) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$

với $0 \le x \le d \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \dfrac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Leftrightarrow v_1\sqrt{\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+1} = v_2\sqrt{\left(\dfrac{b}{d-x}\right)^2+1}$

Xét hàm $g(x) = \sqrt{\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+1}$ với $0 \le x \le d \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-a^2}{x^3\sqrt{\left(\dfrac{a}{x}\right)^2+1}} < 0$ với $0 \le x \le d$

hay hàm số $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[0,d]$.

Tương tự ta xét hàm

$h(x) = \sqrt{\left(\dfrac{b}{d-x}\right)^2+1}$ với $0 \le x \le d$ $\Rightarrow h'(x) = \dfrac{b^2}{(d-x)^3\sqrt{\left(\dfrac{b}{d-x}\right)^2+1}} > 0$ với $0 \le x \le d$

hay hàm số $h(x)$ đồng biến trên đoạn $[0,d]$.

Như vậy, đồng thời suy ra được hàm $f'(x)$ đồng biến trên đoạn $[0,d]$.

Lại có : $f'(0) < 0$ và $f'(d) > 0$, dễ thấy hàm hàm $f'(x)$ liên tục.

Do đó phương trình $f'(x) = 0$ có duy nhất 1 nghiệm $x_0 \in (0,d)$.

Mặt khác, với $x \in [0,x_0)$ $\Rightarrow \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} < \dfrac{1}{g(x_0)} = \dfrac{1}{h(x_0)} < \dfrac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Rightarrow f'(x) < 0$

Tương tự với $x \in (x_0,d] \Rightarrow \dfrac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} > \dfrac{1}{g(x_0)} = \dfrac{1}{h(x_0)} > \dfrac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \Rightarrow f'(x) > 0$

Vậy dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $\underset{[0,d]}{\text{Min}}\, f(x) = f(x_0)$

Thay số : $\dfrac{x_0}{15\sqrt{0,03^2+x_0^{\,2}}} = \dfrac{0,12-x_0}{25\sqrt{0,06^2+(0,12-x_0)^2}}$

$\Rightarrow x_0 \approx 0,018 \Rightarrow AM = \sqrt{x^2+AH^2} \approx 0,035$ km.

Chọn **C**.