PHẦN III ỨNG DỤNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC.

Bất đẳng thức được ứng dụng rộng rãi nhiều trong việc tìm GTLN, GTNN, giải phương trình và hệ phương trình, dùng để giải phương trình nghiệm nguyên và rất nhiều ứng dụng khác nữa.

I - Dùng BĐT để tìm GTLN và GTNN

Kiến thức : Nếu f(x) $\geq$ m thì f(x) có giá trị nhỏ nhất là m.

Nếu f(x) $\leq$ M thì f(x) có giá trị lớn nhất là M.

Ta thường hay áp dụng các bất đẳng thức thông dụng như: Côsi, Bunhiacôpxki , bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, kiểm tra trường hợp xảy ra dấu đẳng thức để tìm cực trị. Tìm cực trị của một biểu thức có dạng là đa thức , ta hay sử dụng phương pháp biến đổi tương đương , đổi biến số , một số bất đẳng thức Tìm cực trị của một biểu thức có chứa dấu giá trị tuyệt đối , ta vận dụng các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

Chú ý: $|A|+|B|\geq|A+B|$

Xảy ra dấu " = " khi AB $\geq$ 0

$|A|\geq 0$ *Dấu "= " xảy ra khi A = 0*

Một số ví du:

Ví du 1:

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$A = (x^2 + x)(x^2 + x - 4)$

b. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$B = - x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y$

Giải

Ta có:

a. $A = (x^2 + x)(x^2 + x - 4)$. Đặt : $t = x^2 + x - 2$

$\Rightarrow A = (t - 2)(t + 2) = t^2 - 4 \geq - 4$

Dấu bằng xảy ra khi : $t = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

(x - 2)(x + 2) = 0 ⇔ x = -2 ; x = 1

=> min A = - 4 khi x = -2 ; x = 1

b. Tương tự

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a. C = $|2x-3|+|2x-1|$

b. D = $|x^2+x+3|+|x^2+x-6|$

c. E = $|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$

Giải

Áp dụng BĐT : $|A|+|B|\ge|A+B|$

Dấu " = "xảy ra khi AB ≥ 0

=> C = $|2x-3|+|1-2x|\ge|2x-3+1-2x|=|-2|=2$

Dấu " = " xảy ra khi (2x - 3)(1 - 2x) $\ge$ 0 ⇔ $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

Vậy minC = 2 khi $\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

b, Tương tự : minD = 9 khi : -3 $\le$ x $\le$ 2

c. Tương tự: minE = 4 khi : 2 $\le$ x $\le$ 3

Ví dụ 3:

Cho ba số dương x , y , z thoả mãn : $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}\ge 2$

Tìm giá trị lớn nhất của tích : P = xyz.

Giải

$$\frac{1}{1+x}\ge\left(1-\frac{1}{1+y}\right)+\left(1-\frac{1}{1+z}\right)=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\ge 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}}$$

Tương tự : $\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{zx}{(1+x)(1+z)}}$

$\frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}}$

Từ đó suy ra : P = xyz $\leq \frac{1}{8}$

MaxP = $\frac{1}{8}$ khi x = y = z = $\frac{1}{2}$

<u>Ví dụ 4:</u>

Cho $G = \frac{yz\sqrt{x-1} + zx\sqrt{y-2} + xy\sqrt{z-3}}{xyz}$

Tìm giá trị lớn nhất của G.

<u>Giải</u>

Tập xác định : x ≥ 1 ; y ≥ 2 ; z ≥ 3

Ta có : $G = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y} + \frac{\sqrt{z-3}}{z}$

Theo BĐT Côsi ta có : $\sqrt{x-1} \leq \frac{x-1+1}{2}$ => $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

Tương tự : $\frac{\sqrt{y-2}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{z-3}}{z} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$

=> G $\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Vậy MaxG $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ đạt được khi x = 2 ; y = 2 ; z = 6

<u>Bài tập áp dụng:</u>

Bài 1:

Tìm giá trị lớn nhất của:

S = xyz.(x+y).(y+z).(z+x) với x,y,z > 0 và x+y+z =1

Bài 2: Cho xy+yz+zx = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Bài 3:Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A = $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$

Bài 4:Tìm giá trị lớn nhất , nhỏ nhất của phân thức D = $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

Bài 5; Tìm số tự nhiên nhỏ nhất biết rằng số này khi chia cho 9 có số dư là 5 và khi chia cho 31 có số dư là 28.

II □ Dùng BĐT để giải phương trình và hệ phương trình

Nhờ vào các tính chất của bất đẳng thức , các phương pháp chứng minh bất đẳng thức , ta biến đổi hai vế (VT , VP) của phương trình sau đó suy luận để chỉ ra nghiệm của phương trình. Nếu VT = VP tại một hoặc một số giá trị nào đó của ẩn (thoả mãn TXĐ) => phương trình có nghiệm.

Nếu VT > VP hoặc VT < VP tại mọi giá trị của ẩn

$\Rightarrow$ *phương trình vô nghiệm*

Còn đối với hệ phương trình ta dùng bất đẳng thức để biến đổi từng phương trình của hệ , suy luận và kết luận nghiệm. Biến đổi một phương trình của hệ , sau đó so sánh với phương trình còn lại , lưu ý dùng các bất đẳng thức quen thuộc.

Một số ví dụ:

<u>Ví dụ 1:</u>

Giải phương trình : $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x$

<u>Giải</u>

Điều kiện : $x \ge 1$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1}$

$= 13.2.\frac{1}{2}\sqrt{x-1} + 3.2.\frac{3}{2}\sqrt{x+1} \le 13(x - 1 + \frac{1}{4}) + 3(x + 1 + \frac{9}{4}) = 16x$

Dấu " = " xảy ra

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ thoả mãn (*)

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ dấu " = " ở (2) xảy ra

Vậy (1) có nghiệm $x = \frac{5}{4}$.

<u>Ví dụ 2:</u>

Giải phương trình : $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} - x^2 + 4x - 6 = 0$ (*)

<u>Giải</u>

TXĐ : $\frac{3}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

(*) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = x^2 - 4x + 6$

VP = $(x - 2)^2 + 2 \ge 2$, dấu " = " xảy ra khi x = 2

=> với x = 2 (thoả mãn TXĐ) thì VT = VP = 2

=> phương trình (*) có nghiệm x = 2

<u>Ví dụ 3:</u>

Giải phương trình : $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+2} = x^2 - 6x + 13$

<u>Giải</u>

TXĐ : $-2 \le x \le 6$

VP = $(x - 3)^2 + 4 \ge 4$. Dấu " = " xảy ra khi x = 3

$VT^2 = (\sqrt{6-x}.1 + \sqrt{x+2}.1)^2 \le (6 - x + x + 2)(1 + 1) = 16$

=> VT $\le$ 4 , dấu " = " xảy ra khi $\sqrt{6-x} = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow x = 2$

=> không có giá trị nào của x để VT = VP => Phương trình vô nghiệm

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 + x^2y^2 - 2y = 0 & (2) \end{cases}$

Giải

(1) ⇔ $x^3 = -1 - 2(y-1)^2$ ⇔ $x^3 \leq -1$ ⇔ $x \leq -1$. (*)

(2) ⇔ $x^2 \leq \dfrac{2y}{1+y^2} \leq 1$ (vì $1 + y^2 \geq 2y$) ⇔ $-1 \leq x \leq 1$ (**)

Từ (*) và (**) => x = -1 . Thay x = -1 vào (2) ta có : y = 1

=> Hệ phương trình có nghiệm duy nhất : x = -1 ; y = 1

Ví dụ 5:Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^4 + y^4 + z^4 = xyz \end{cases}$$

Giải

Áp dụng : BĐT : $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dấu " = " xảy ra khi a = b

Ta có : $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$; $y^4 + z^4 \geq 2y^2z^2$; $z^4 + x^4 \geq 2z^2x^2$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ (*)

Mặt khác: $x^2y^2 + y^2z^2 \geq 2x^2yz$

$y^2z^2 + z^2x^2 \geq 2xy^2z$

$x^2y^2 + z^2x^2 \geq 2xyz^2$

$\Rightarrow 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 2xyz(x+y+z) = 2xyz$

$\Rightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz$ (**)

Từ (*) và (**) => $x^4 + y^4 \Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz$

Dấu " = " xảy ra khi : x = y = z mà x + y + z = 1 nên : $x = y = z = \dfrac{1}{3}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm : x = y = z = $\frac{1}{3}$

Bài tập áp dụng:

Bài 1:Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=14 & (1) \\ \left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}+\frac{1}{6z}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)=1 & (2) \end{cases} \quad \text{(với x, y, z > 0)}$$

Bài 2: Giải phương trình sau:

$$4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$$

Bài 3: Giải phương trình: $x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3$

Bài 4:Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$$

Bài 5: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} |xy-4|=8-y^2 & (1) \\ xy=2+x^2 & (2) \end{cases}$

III – Dùng BĐT để giải phương trình nghiệm nguyên

Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Tìm các số nguyên x,y,z thoả mãn

$$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$$

Giải

Vì x,y,z là các số nguyên nên

$$x^2+y^2+z^2\le xy+3y+2z-3$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-xy-3y-2z+3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-xy+\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{3y^2}{4}-3y+3\right)+\left(z^2-2z+1\right)\le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2 \le 0 \quad (*)$$

Mà $\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2 \ge 0 \qquad \forall x, y \in R$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}-1\right)^2+\left(z-1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{y}{2}=0 \\ \frac{y}{2}-1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Các số x,y,z phải tìm là $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

<u>Ví dụ 2:</u>

Tìm các cặp số nguyên thoả mãn phương trình:

$\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \qquad (*)$

<u>Giải</u>

(*) Với x < 0 , y < 0 thì phương trình không có nghĩa

(*) Với x > 0 , y > 0

Ta có $\sqrt{x+\sqrt{x}} = y \quad \Leftrightarrow x+\sqrt{x} = y^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = y^2 - x > 0$$

Đặt $\sqrt{x} = k$ (k nguyên dương vì x nguyên dương)

Ta có $k.(k+1) = y^2$

Nhưng $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2$

$\Rightarrow k < y < k+1$

Mà giữa k và k+1 là hai số nguyên dương liên tiếp không tồn tại một số nguyên dương nào cả nên không có cặp số nguyên dương nào thoả mãn phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Bài tập áp dụng:

Bài 1: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$

PHẦN IV - GIẢI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI BT ÁP DỤNG

Dạng 1 □ Dựa vào định nghĩa và các phép biến đổi tương đương

Bài 1:

Giải

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$
$$\Rightarrow 2^2 \leq 2(a^2 + b^2) \quad (Do \ \ a+b=2)$$
$$\Rightarrow 2 \leq a^2 + b^2$$
$$\Rightarrow 2^2 \leq (a^2 + b^2)^2$$

Tương tự: $(a^2 - b^2)^2 \geq 0 \Rightarrow 2a^2b^2 \leq a^4 + b^4$

$\Rightarrow a^4 + b^4 + 2a^2b^2 \leq 2(a^4 + b^4)$

$\Rightarrow (a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4)$

Vậy: $2^2 \le (a^2+b^2)^2 \le 2(a^4+b^4)$

$\Rightarrow\ a^4+b^4 \ge 2$

Điều phải chứng minh.

Bài 2:

Giải

Ta có với mọi số nguyên dương k:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} = \sqrt{k}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$

$$=\sqrt{k}(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}})(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}})$$

$$=(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}})(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}) < 2(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}) \text{ vì } 0<\frac{k}{k+1}<1$$

Do đó:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+...+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2(1-\frac{1}{\sqrt{2}})+2(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+...+2(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$=2(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})<2 \text{ điều phải chứng minh.}$$

Bài 3:

Giải

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4}-mn+n^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mp+p^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-mq+q^2\right)+\left(\frac{m^2}{4}-m+1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m}{2}-n\right)^2+\left(\frac{m}{2}-p\right)^2+\left(\frac{m}{2}-q\right)^2+\left(\frac{m}{2}-1\right)^2 \ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{m}{2} - n = 0 \\ \frac{m}{2} - p = 0 \\ \frac{m}{2} - q = 0 \\ \frac{m}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{m}{2} \\ p = \frac{m}{2} \\ q = \frac{m}{2} \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = p = q = 1 \end{cases}$

Bài 4:

<u>Giải</u>

$\left(a^{10} + b^{10}\right)\left(a^2 + b^2\right) \geq \left(a^8 + b^8\right)\left(a^4 + b^4\right)$

$\Leftrightarrow a^{12} + a^{10}b^2 + a^2b^{10} + b^{12} \geq a^{12} + a^8b^4 + a^4b^8 + b^{12}$

$\Leftrightarrow a^8b^2\left(a^2 - b^2\right) + a^2b^8\left(b^2 - a^2\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0$

Bất đẳng thức cuối đúng vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5:

<u>Giải</u>

Với $a > 0$, $b > 0$ => $a + b > 0$

Ta có : $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$

<=> $\left(\frac{a+b}{2}\right).\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

<=> $a^2 - ab + b^2 \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

<=> $4a^2 - 4ab + 4b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$

<=> $3(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$

<=> $3(a - b)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức này đúng

=> $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$ Dấu " = " xảy ra khi a = b.

Bài 6:

Giải

Ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{a^3}{a^2+b^2} = a - \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \\ a^2+b^2 \geq 2ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$$

$$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}$$

$$\frac{c^3}{c^2+d^2} \geq c - \frac{d}{2}$$

$$\frac{d^3}{d^2+a^2} \geq d - \frac{a}{2}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}$$

Dạng 2 □ Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky và bất đẳng thức phụ

Bài 1:

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có:

$$(1x+1y+1z)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x+y+z)^2$$

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \ (1)$$

Theo giả thuyết ta có:

$$x(x-1)+y(y-1)+z(z-1)\le\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)\le\frac{4}{3}$$

Vì theo (1) $\Rightarrow \frac{1}{3}(x+y+z)^2\le(x^2+y^2+z^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+y+z)^2-(x+y+z)\le\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2-3(x+y+z)\le 4$$

Đặt $s=x+y+z$ Ta giải phương trình bậc 2

$$\Leftrightarrow s^2-3s-4\le 0$$

$$\Leftrightarrow -1\le s\le 4$$

$$\Leftrightarrow x+y+z\le 4$$

Bài 2:

<u>Giải</u>

Do a,b,c đối xứng ,giả sử $a\ge b\ge c$ $\Rightarrow \begin{cases} a^2\ge b^2\ge c^2\\ \frac{a}{b+c}\ge\frac{b}{a+c}\ge\frac{c}{a+b}\end{cases}$

Áp dụng BĐT Trê- bư-sép ta có:

$$a^2.\frac{a}{b+c}+b^2.\frac{b}{a+c}+c^2.\frac{c}{a+b}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)=\frac{1}{3}.\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

Vậy $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{a+b}\ge\frac{1}{2}$ .Dấu bằng xảy ra khi a=b=c=$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 3:

<u>Giải</u>

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:

$(x^2 + y^2)^2 = (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \quad (|x| \le 1 \; ; \; |y| \le 1)$

$\le (x^2 + y^2)(1 - y^2 + 1 - x^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1$

Ta lại có : $(3x + 4y)^2 \le (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \le 25$

$\Rightarrow 3x + 4y \le 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \\ \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

Điều kiện : $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{5}{2}$.

Bài 4:

<u>Giải</u>

Áp dụng bất dẳng thức Bunhiacôpxki với 2 bộ 3 số ta có:

$$\left(\sqrt{a+b}.1 + \sqrt{b+c}.1 + \sqrt{c+a}.1\right) \le (1+1+1)\left[\left(\sqrt{a+b}\right)^2 + \left(\sqrt{b+c}\right)^2 + \left(\sqrt{c+a}\right)^2\right]$$

$\Rightarrow \left(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}\right)^2 \le 3.(2a + 2b + ac) = 6$

$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \le \sqrt{6}$

Dấu " = " xảy ra khi : a = b = c = $\dfrac{1}{3}$

Bài 5:

<u>Giải</u>

Ta có $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

$\Leftrightarrow p < 3p - (a+b+c) + 2(\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)})$

Kết quả này luôn đúng vì $a+b+c = 2p$ và $p-a > o, p-b > o, p-c > o.$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$1.\sqrt{p-a}+1.\sqrt{p-b}+1.\sqrt{p-c}\le\sqrt{(1+1+1)(p-a+p-b+p-c)}=\sqrt{3p}$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 6:

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski cho các số $1,1,1,\left|\frac{a}{b}\right|,\left|\frac{b}{c}\right|,\left|\frac{c}{a}\right|$ ta có :

$$(1.\left|\frac{a}{b}\right|+1.\left|\frac{b}{c}\right|+1.\left|\frac{c}{a}\right|)^2\le(1^2+1^2+1^2)(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2})$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{3}(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|)(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\ge 3\sqrt[3]{\left|\frac{a}{b}\right|.\left|\frac{b}{c}\right|.\left|\frac{c}{a}\right|}=3$$

Do đó:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge\frac{1}{3}(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|).3\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\qquad\text{(đpcm).}$$

Bài 7:

Giải

Từ giả thiết đề ra $a,b,c>0$

Ta có: $ab+bc+ca=abc\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

$$(*)\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}}\ge\sqrt{3}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhicopsky ta có:

$$x+y+z\le\sqrt{1^2+1^2+1^2}.\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Do đó ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{cb}\ge\frac{1}{\sqrt{3}}3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{cb}\ge\sqrt{3}$$

Dạng 3 □ Sử dụng Bất đẳng thức Cauchy

Bài 1:

Giải

$$VT=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+3$$

Áp dụng BĐT côsi cho các bội số :

$\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$; $\frac{b}{c}$ và $\frac{c}{b}$; $\frac{a}{c}$ và $\frac{c}{a}$

Ta có : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{b}{a}.\frac{a}{b}}=2$; $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$; $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$

<=> $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 6$

<=> $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+3\ge 9$

VT ≥ 9 (đpcm).

Bài 2:

Giải

a)Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)}{2} = \frac{c}{2}$$
$$\sqrt{(p-a)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-c)}{2} = \frac{b}{2}$$
$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-b)+(p-c)}{2} = \frac{a}{2}$$

Nhân theo vế ta được:

$$\sqrt{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} \leq \frac{c}{2}.\frac{b}{2}.\frac{a}{2} = \frac{abc}{8}$$

b)Ta áp dụng với x,y>0 ta luôn có bất đẳng thức đúng:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$

Thay các giá trị vào ta được:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{2p-a-b} = \frac{4}{c}$$

Tương tự:

$$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-b-c} = \frac{4}{a}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{2p-a-c} = \frac{4}{b}$$

Cộng theo vế ta có:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Bài 3:

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi , ta có:

$$\sqrt{a+1} \le \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2}+1$$

Tương tự : $\sqrt{b+1} \le \frac{b}{2}+1$; $\sqrt{c+1} \le \frac{c}{2}+1$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta được:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} \le \frac{a+b+c}{2}+3 = 3,5$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a = b = c =0 trái với giả thiết : a + b + c = 1

Vậy : $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1} < 3,5$

Bài 4:

Giải

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\sqrt{(p-a)(p-b)} \le \frac{(p-a)+(p-b)}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \le \frac{(p-b)+(p-c)}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\sqrt{(p-c)(p-a)} \le \frac{(p-c)+(p-a)}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} \le \frac{c}{2}.\frac{b}{2}.\frac{a}{2}$$

$\Rightarrow (p-a)(p-b)(p-c) \le \frac{abc}{8}$. Điều phải chứng minh.

Dạng 4 □ Chứng minh bằng phản chứng

Bài 1:

Giải:

Giả sử cả 3 bất đẳng thức ở trên đều đúng, có nghĩa:

$a(1-b) > \frac{1}{4}$; $b(1-c) > \frac{1}{4}$; $c(1-a) > \frac{1}{4}$

$\Rightarrow abc(1-a)(1-b)(1-c) > \frac{1}{64}$ $(Do\ \ a,b,c \in (0;1))$

Ta có
$$a(1-a) = -(a^2-a) = -\left[\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$
$$= \frac{1}{4} - \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$$

Tương tự ta có: $0 < a(1-a) \le \frac{1}{4}$

$$0 < b(1-b) \le \frac{1}{4}$$

$$0 < c(1-c) \le \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow a(1-a)b(1-b)c(1-c) \le \frac{1}{64}$

$\Rightarrow abc(1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{1}{64}$

Bài 2:

<u>Giải:</u>

Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử trong 25 số tự hiên đả cho, không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{25}$$

Suy ra $a_1 > 1, a_2 > 2, \ldots, a_{25} > 25$

Thế thì $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \le \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{25}}$ (1)

Ta lại có

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{25}} < 2\sqrt{25} - 1 = 9 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{a_{25}}}$ < 9, trái với giả thiết. Vậy tồn tại hai số bằng nhau trong 25 số $a_1, a_2, ..., a_{25}$.

Dạng 5 - Phương pháp lượng giác

Bài 1:

Giải

Biến đổi điều kiện: $a^2 + b^2 - 2a - 4b + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-2)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} a-1=\sin\alpha \\ b-2=\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1+\sin\alpha \\ b=2+\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow A=\left|\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha\right|$

$A = \left|\sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\right| = 2\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha - \frac{1}{2}\cos 2\alpha\right| = 2\left|\sin(2\alpha - \frac{\pi}{6})\right| \le 2$ (đpcm)

Bài 2:

Giải:

Biến đổi bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + 2(b-a) \ge - 1 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (b + 1)^2 \ge 1$

Đặt $\begin{cases} a-1=R\sin\alpha \\ b+1=R\cos\alpha \end{cases}$ với $R \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=R\sin\alpha+1 \\ b=R\cos\alpha-1 \end{cases} \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+1)^2=R^2$

Ta có: $|5a+12b+7|=13 \Leftrightarrow |5(R\sin\alpha+1)+12(R\cos\alpha-1)+7|=13$

$\Leftrightarrow |5R\sin\alpha+12R\cos\alpha|=13 \Leftrightarrow 1=R\left|\frac{5}{13}\sin\alpha+\frac{12}{13}\cos\alpha\right|=R\left|\sin\left(\alpha+\arccos\frac{5}{13}\right)\right|\le R$

Từ đó $\Rightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 = R^2 \ge 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2(b - a) \ge - 1$ (đpcm)

Bài 3:

Giải:

Từ đk $1 - a^2 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \le 1$ nên

Đặt a = cosα với $0 \le \alpha \le \pi \Rightarrow \sqrt{1-a^2}$ = sinα. Khi đó ta có:

$$A=2\sqrt{3}a^2+2a\sqrt{1-a^2}=2\sqrt{3}\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha=\sqrt{3}(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha$$

$$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]+\sqrt{3}=2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}-2\le A\le\sqrt{3}+2\ (\text{đpcm})$$

Bài 4:

Giải:

Do $|a| \ge 1$ nên :

Đặt $a=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{a^2-1}=\sqrt{tg^2\alpha}=tg\alpha$. Khi đó:

$$A=\left|\frac{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{3}}{a}\right|=\left|(tg\alpha+\sqrt{3})\cos\alpha\right|=\left|\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\right|=2\left|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right|\le 2\ (\text{đpcm})$$

Bài 5:

Giải:

Do $|a| \ge 1$ nên:

Đặt $a=\dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{a^2-1}=\sqrt{tg^2\alpha}=tg\alpha$. Khi đó:

$$A=\frac{5-12\sqrt{a^2-1}}{a^2}=(5-12tg\alpha)\cos^2\alpha=5\cos^2\alpha-12\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5(1+\cos 2\alpha)}{2}-6\sin 2\alpha$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{13}{2}\left(\frac{5}{13}\cos 2\alpha-\frac{12}{13}\sin 2\alpha\right)=\frac{5}{2}+\frac{13}{2}\cos\left(2\alpha+\arccos\frac{5}{13}\right)$$

$$\Rightarrow -4=\frac{5}{2}+\frac{13}{2}(-1)\le A=\frac{5}{2}+\frac{13}{2}\cos\left(2\alpha+\arccos\frac{5}{13}\right)\le\frac{5}{2}+\frac{13}{2}.1=9\ (\text{đpcm})$$

Bài 6:

Giải:

Đặt a = tgα, b = tgβ, c = tgγ. Khi đó bất đẳng thức ⇔

$$\Leftrightarrow \frac{|\,tg\alpha - tg\beta\,|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} + \frac{|\,tg\beta - tg\gamma\,|}{\sqrt{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}} \geq \frac{|\,tg\gamma - tg\alpha\,|}{\sqrt{(1+tg^2\gamma)(1+tg^2\alpha)}}$$

$$\Leftrightarrow \left|\cos\alpha\cos\beta.\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\right| + \left|\cos\beta\cos\gamma.\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta.\cos\gamma}\right| \geq \left|\cos\gamma\cos\alpha.\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma.\cos\alpha}\right|$$

⇔ $|\sin(\alpha-\beta)|+|\sin(\beta-\gamma)| \geq |\sin(\gamma-\alpha)|$. Biến đổi biểu thức vế phải ta có:

$|\sin(\gamma-\alpha)| = |\sin[(\alpha-\beta)+(\beta-\gamma)]| = |\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)+\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)| \leq$

$|\sin(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)|+|\sin(\beta-\gamma)\cos(\alpha-\beta)|=|\sin(\alpha-\beta)||\cos(\beta-\gamma)|+|\sin(\beta-\gamma)||\cos(\alpha-\beta)|$

$\leq |\sin(\alpha-\beta)|.1 + |\sin(\beta-\gamma)|.1 = |\sin(\alpha-\beta)| + |\sin(\beta-\gamma)| \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 7:

Giải:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{d}\right)}} + \frac{\sqrt{\frac{cd}{ab}}}{\sqrt{\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{d}\right)}} \leq 1$$

Đặt $tg^2\alpha=\frac{c}{a}$, $tg^2\beta=\frac{d}{b}$ với $\alpha,\beta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ⇒ Biến đổi bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} + \frac{\sqrt{tg^2\alpha.tg^2\beta}}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} = \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta} + \sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta} \leq 1$$

⇔ $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) \leq 1$ đúng ⇒ (đpcm)

Dấu bằng xảy ra ⇔ $\cos(\alpha-\beta) = 1 \Leftrightarrow \alpha=\beta \Leftrightarrow \frac{c}{a}=\frac{d}{b}$.

Bài 8:

Giải:

Đặt a = tgα, b = tgβ. Khi đó $\left|\dfrac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| = \left|\dfrac{(tg\alpha+tg\beta)(1-tg\alpha tg\beta)}{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}\right|$

$= \left|\cos^2\alpha\cos^2\beta.\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}.\dfrac{\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}\right|$

$= \left|\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\right| = \dfrac{1}{2}\left|\sin[2(\alpha+\beta)]\right| \le \dfrac{1}{2}$ (đpcm).

Dạng 6 □ Phương pháp qui nạp

Bài 1:

Giải:

Với n =2 ta có $1+\frac{1}{4}<2-\frac{1}{2}$ (đúng)

Giả sử BĐT (1) đúng với n =k ta phải chứng minh

BĐT (1) đúng với n = k+1

Thật vậy khi n =k+1 thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

Theo giả thiết quy nạp:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<2-\frac{1}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1^2}+....+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k+1+1}{(k+1)^2}<\frac{1}{k} \Leftrightarrow k(k+2)<(k+1)^2 \Leftrightarrow k^2+2k<k^2+2k+1$$

Điều này đúng .Vậy bất đẳng thức (1) được chứng minh

Bài 2:

Giải:

Ta thấy BĐT (1) đúng với n= 1

Giả sử BĐT (1) đúng với n=k ta phải chứng minh BĐT đúng với n=k+1

Thật vậy với n = k+1 ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k} \cdot \frac{a+b}{2} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Vế trái (2)} \le \frac{a^k+b^k}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2} - \frac{a^{k+1}+ab^k+a^kb+b^{k+1}}{4} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).\left(a-b\right) \ge 0 \qquad (3)$$

Ta chứng minh (3)

(+) Giả sử a ≥ b và giả thiết cho a ≥ -b ⇔ a ≥ $|b|$

$$\Leftrightarrow a^k \ge |b|^k \ge b^k \quad \Rightarrow (a^k-b^k)(a-b) \ge 0$$

(+) Giả sử a < b và theo giả thiết a < b ⇔ $|a|^k < b^k \Leftrightarrow a^k < b^k$

$$\Leftrightarrow \left(a^k-b^k\right).\left(a-b\right) \ge 0$$

Vậy BĐT (3)luôn đúng ta có (đpcm)

Bài 3:

Giải:

Với n = 1 ta có $a^2+b^2=c^2$ (định lý Pitago).

Vậy với n = 1 $a^2+b^2 \le c^2$ đúng

Ta giả sử BĐT đúng với n= k nghĩa là ta có:

$$a^{2k}+b^{2k} \le c^{2k}$$

xét với n = k +1 ta có:

$$a^{2(k+1)}+b^{2(k+1)}=(a^{2k}+b^{2k})(a^2+b^2)-a^2a^{2k}-b^2b^{2k}\le c^{2k}.c^2=c^{2(k+1)}$$

Vậy BĐT đúng với n = k +1.$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Dạng 7 - Phương pháp áp dụng các tính chất của các dãy tỉ số bằng nhau

Giải

Ta biết với a, b, c dương và $\frac{a}{b}<1\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

Vì $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

$$\Leftrightarrow ab+ac<ab+bc$$

$$\Leftrightarrow ac<bc\Leftrightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{c}=1$$

Vậy với a, b, c, d > o thì:

$$\frac{a}{a+b+c}<1\quad,\quad\frac{b}{b+c+d}<1\quad,\quad\frac{c}{c+d+a}<1\quad,\quad\frac{d}{d+a+b}<1$$

Do đó ta được:

$$\frac{a}{a+b+c+d}<\frac{a}{a+b+c}<\frac{a+d}{a+b+c+d}$$

$$\frac{b}{a+b+c+d}<\frac{b}{b+c+d}<\frac{b+a}{b+c+d+a}$$

$$\frac{c}{a+b+c+d}<\frac{c}{c+d+a}<\frac{c+b}{c+d+a+b}$$

$$\frac{d}{a+b+c+d}<\frac{d}{d+a+b}<\frac{d+c}{d+a+b+c}$$

Cộng từng vế bốn đẳng thức trên ta được:

$$1<\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+d}+\frac{c}{c+d+a}+\frac{d}{d+a+b}<2\ \text{(đpcm).}$$

Bài 2:

Giải:

Không mất tính tổng quát ta giả sử : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d}$ Từ : $\frac{a}{c} \le \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} \le \frac{a+b}{c+d} \le \frac{b}{d}$

$\frac{a}{c} \le 1$ vì a + b = c + d

Nếu: b ≤ 998 thì $\frac{b}{d} \le 998 \Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} \le 999$

Nếu: b = 998 thì a = 1 $\Rightarrow \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{1}{c} + \frac{999}{d}$ Đạt giá trị lớn nhất khi d = 1; c = 999

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = 999 + \frac{1}{999}$ khi a = d =1; c = b = 999.

Bài 3:

Giải:

Từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} = \frac{c}{d}$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$ điều phải chứng minh.

Dạng 8 □ Phương pháp dùng tam thức bậc hai

Bài 1: **Giải:**

Ta có: $(1) \Leftrightarrow a^2 + 2(b-3c+d)a + (b+c+d)^2 - 8bd > 0 \ (2)$

Xét tam thức $f(a) = a^2 + 2(b-3c+d)a + (b+c+d)^2 - 8bd$

Tam thức f(a) có:
$$\Delta' = (b-3c+d)^2 - (b+c+d)^2 + 8bd$$
$$\Delta' = 8(c-b)(c-d)$$

Theo giả thiết ta có: $\Delta' < 0$

Suy ra: f(a)>0

Suy ra (2) đúng vậy nên (1) cũng đúng.

Bài 2:

Giải:

Theo giả thiết ta có: $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) > 0$

Ta có thể giả sử: $(p^2 - a^2 - b^2) > 0$ Và $p \neq 0$

Đặt $f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$

Ta có: $f(x) = (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$

Đặt: $x_0 = \dfrac{p}{q}$ Ta có: $f(x_0) = -(ax_0 - c)^2 - (bx_0 - d)^2 \leq 0$

Suy ra $\Delta \geq 0$, tức là (1) đúng.

Dạng 9 □ Phương pháp dùng tính chất bắc cầu

Bài 1:

Giải

Ta có: $(1-a)(1-b) = 1 - a - b + ab > 1 - a - b$ (1)

Vì $1 - c > 0$ nên:

$(1-a)(1-b)(1-c) > (1-a-b)(1-c)$ (2)

$(1-a-b)(1-c) = 1 - a - b - c + c(a+b) > 1 - a - b - c$ (3)

Từ (2) và (3) ta suy ra: $(1-a)(1-b)(1-c) > 1 - a - b - c$

Vậy: $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) > (1-a-b-c)(1-d) > 1 - a - b - c - d$

Vì $d(a+b+c) > 0$

Bài 2:

Giải

Vì $a + b + c = 3$ nên có ít nhất một trong 3 bộ số a, b, c không nhỏ hơn 1, giả sử $a \geq 1$

Vì $1 \leq a \leq 2$ nên $(a-1)(a-2) = a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Rightarrow a(3-a) \geq 2$

Suy ra $ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(3-a) + bc \geq 2$ (1)

Vậy $\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\\&=9-2(ab+bc+ca)\le 5\end{aligned}$ theo (1).

Bài 3:

Giải

Áp dụng công thức Hê - rông về tính diện tích tam giác:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ Với $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{1}{2}$ theo giả thiết.

Do đó: $S^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)$

$$\begin{aligned}16S^2&=(1-2a)(1-2b)(1-2c)\\&=1-2a-2b-2c+4ab+4ac+4bc-8abc\\&=-1+4(ab+bc+ac)-8abc>0\end{aligned}$$

Suy ra: $4abc+\frac{1}{2}<2ab+2bc+2ca$

Mà 2ab+2bc+2ca=$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=1-(a^2+b^2+c^2)$

Nên $4abc+\frac{1}{2}<1-a^2-b^2-c^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2+4abc<\frac{1}{2}$

Bài 4:

Giải

Nếu $a\ge 1$ thì từ $b+c>a\ge 1$ suy ra a+b+c >2, vô lý. Vậy 0 < a < 1.

Tương tự ta có: 0 < b < 1 và 0 < c < 1.

Ta có: $(1-a)(1-b)(1-c)=1-a-b-c+ab+bc+ca-abc>0$ suy ra

$abc<ab+bc+ca-1$ vì $a+b+c=2$ (1)

Mà $4=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca),\quad suy\,ra:$

$$ab+bc+ca=2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$abc < 1 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$

Dạng 10 - Phương pháp dùng các bất đẳng thức trong tam giác

Bài 1:

Giải

Ta có: $a \le b \Rightarrow (a+b+c)^2 \le (b+b+c)^2 = (2b+c)^2$

Ta chứng tỏ $(2b+c)^2 \le 9bc \Leftrightarrow 4b^2 - 5bc + c^2 \le 0$

$\Leftrightarrow (b-c)(4b-c) \le 0$

Kết quả trên luôn đúng vì $b \le c \Rightarrow b - c \le 0$ và $4b - c = 2b + b + a - c \ge 0 \quad do\ b \ge a$

và $c < a + b$.

Vậy $(a+b+c)^2 \le 9bc$

Bài 2:

Giải

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác nên:

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < a + c \\ 0 < c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - c = P > 0 \\ a + c - b = Q > 0 \\ b + c - a = R > 0 \end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\frac{P+Q}{2} \ge \sqrt{PQ}$$

$$\frac{P+R}{2} \ge \sqrt{PR}$$

$$\frac{R+Q}{2} \ge \sqrt{QR}$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q}{2}.\frac{P+R}{2}.\frac{R+Q}{2} \ge \sqrt{P^2Q^2R^2} = PQR$$

$\Rightarrow bca \ge (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$ Điều phải chứng minh.

Bài 3:

Giải

Đặt $f(p) = pa^2 + qb^2 > pqc^2$ vì p + q = 1 $\Rightarrow q = 1 - p$

$$\Rightarrow f(p) = pa^2 + (1-p)b^2 - p(1-p)c^2$$
$$= c^2p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2$$

Là một tam thức bậc hai theo p có biệt số

$$\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2$$
$$= (a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$$
$$= \left[a^2 - (b+c)^2\right]\left[a^2 - (b-c)^2\right]$$
$$= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$$

Trong một tam giác ta có:

$$\begin{cases} 0 < a < b + c \\ 0 < b < a + c \\ 0 < c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b - c < 0 \\ a + b - c > 0 \\ a - b + c > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) < 0$$

$$\Rightarrow \ \Delta < 0$$

$$\Rightarrow f(p) > 0 \quad \forall p$$

$\Rightarrow \quad pa^2 + qb^2 > pqc^2$ với mọi p, q thoả mãn: p + q = 1.

Giải

Ta có:

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^3(b-c)(b+c) + b^2c^2(b-c) - a^2(b^3 - c^3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)\left[a^3(b+c) + b^2c^2 - a^2(b^2 + bc + c^2)\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)\left[a^2b(a-c) + a^2c(a-c) - b^2(a^2 - c^2)\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(a-c)\left[ab(a-b) + c(a^2 - b^2)\right] < 0$$

$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c)(ab+ca+cb)<0 \quad (2)$

Kết quả (2) luôn đúng với 0 < a < b < c. Nên bất đẳng thức (1) được chứng minh.

Giải

Ta có:

$(1) \Leftrightarrow a[(b-c)^2-a^2]+b[(c-a)^2-b^2]+c\left[(a+b)^2-c^2\right]>0$

$\Leftrightarrow a(b-c+a)(b-c-a)+b(c-a+b)(c-a-b)+c(a+b+c)(a+b-c)>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[a(b-c-a)+b(a-b-c)+c(a+b+c)\right]>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c^2-a^2-b^2+2ab\right]>0$

$\Leftrightarrow (a+b-c)\left[c^2-(a-b)^2\right]>0 \quad (2)$

Vì a, b, c là 3 cạnh của một tam giác nên

$\begin{cases} a+b>c \\ c>|a-b| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-c>0 \\ c^2-(a-b)^2>0 \end{cases}$

Vậy (2) đúng nên BĐT (1) được chứng minh.

Dạng 11 □ Phương pháp đổi biến số

Bài 1

Giải:

Đặt : a = $\dfrac{x^2-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$ và b = $\dfrac{1-x^2y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}$

=> ab = $\dfrac{(x^2-y^2)(1-x^2y^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2}$

Ta có dễ thấy với mọi a, b thì : $-\dfrac{1}{4}(a-b)^2 \le ab \le \dfrac{1}{4}(a+b)^2$

Mà : (a - b)^2 = $\left[1-\dfrac{2}{x^2+1}\right]^2$

$$(a + b)^2 = \left[1 - \frac{2}{y^2 + 1}\right]^2$$

Suy ra : $-\frac{1}{4} \leq ab \leq \frac{1}{4}$.

Bài 2:

Giải

Ta có : $\frac{1}{2x + y + z} = \frac{1}{(x + y) + (x + z)}$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{y + z}\right) \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\right)$$

Cộng theo vế 3 BĐT trên:

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16} . 4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Mà $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$

Vậy $\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1$

Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = $\frac{4}{3}$.

Bài 3:

Giải

Ta đặt $\begin{cases} a = \dfrac{1}{x} \\ b = \dfrac{1}{y} \\ c = \dfrac{1}{z} \end{cases}$ với $x, y, z > 0$ v□ do $abc = 1$ nên $xyz = 1$

Nên BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{y+z} + \dfrac{y^2}{z+x} + \dfrac{z^2}{x+y} \geq \dfrac{3}{2}$

Mặt khác theo BĐT Cauchy- Schwarz ta có:

$$\left[(y+z)+(z+x)+(x+y)\right]\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$$

Vậy BĐT được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 4:

<u>Giải</u>

Từ giả thiết ta có thể đặt: $\begin{cases} x = \dfrac{a}{a+b+c} \\ y = \dfrac{b}{a+b+c} \\ z = \dfrac{c}{a+b+c} \end{cases}$ với a,b,c >0

Nên BĐT $\Leftrightarrow$ CM $\dfrac{a+b+c}{a} + 4.\dfrac{a+b+c}{b} + 9.\dfrac{a+b+c}{c} \geq 36$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+4.\frac{a}{b}+4.\frac{c}{b}+9.\frac{a}{c}+9.\frac{b}{c}\geq 22$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}+4.\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+9.\frac{a}{c}\right)+\left(4.\frac{c}{b}+9.\frac{b}{c}\right)\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}.4.\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}.9.\frac{a}{c}}+2\sqrt{4.\frac{c}{b}.9.\frac{b}{c}}=22 \text{ (đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=2a \\ c=3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{6} \\ y=\frac{1}{3} \\ z=\frac{1}{2} \end{cases}$

Bài 5:

Giải

Từ $xyz=x+y+z+2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{1+z}=1$

Ta đặt $\frac{1}{1+x}=a, \frac{1}{1+y}=b, \frac{1}{1+z}=c$ với $a,b,c>0$

$$\Rightarrow x=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}, y=\frac{1-b}{b}=\frac{a+c}{b}, z=\frac{1-c}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Nên BĐT cần CM $\Leftrightarrow$ CM BĐT $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}\leq\frac{3}{2}$

Mặt khác ta có: $\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)$

$$\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right)$$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)$$

Nên

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}.\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}.\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}.\frac{a}{b+c}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}+\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{3}{2}$$

Vậy BĐT luôn đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Dạng 12 □ Phương pháp làm trội (chứng minh bất đẳng thức có n số hạng).

Hướng dẫn:

Bài 1:

a. Ta có:

$$\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1).(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

Cho n chạy từ 1 đến k .Sau đó cộng lại ta có

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{1}{2}.\left(1-\frac{2}{2n+1}\right)<\frac{1}{2}$$

b. Ta có:

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+...+\frac{1}{1.2.3.....n}<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+.....+\frac{1}{(n-1).n}$$

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+....+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)<2-\frac{1}{n}<2$$

Các BT ứng dụng của Bất đẳng thức

I - Tìm GTLN □ GTNN

Giải

Vì x,y,z > 0 ,áp dụng BĐT Côsi ta có:

x+ y + z $\ge 3\sqrt[3]{xyz}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{xyz}\le\frac{1}{3}\Rightarrow xyz\le\frac{1}{27}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho x+y ; y+z ; x+z ta có:

$(x+y).(y+z).(z+x) \geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(x+z)}$

$\Rightarrow 2 \geq 3\sqrt[3]{(x+y).(y+z).(z+x)}$

Dấu bằng xảy ra khi x=y=z=$\frac{1}{3}$

Vậy $S \leq \frac{8}{27}.\frac{1}{27} = \frac{8}{729}$

Vậy S có giá trị lớn nhất là $\frac{8}{729}$ khi x=y=z=$\frac{1}{3}$.

Bài 2:

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho 6 số (x,y,z) ;(x,y,z)

Ta có $(xy+yz+zx)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)^2$

$\Rightarrow 1 \leq (x^2+y^2+z^2)^2$

Áp dụng BĐT Bunhiacốpski cho (x^2, y^2, z^2) và (1,1,1)

Ta có:

$(x^2+y^2+z^2)^2 \leq (1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4)$

$\rightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 \leq 3(x^4+y^4+z^4)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 1 \leq 3(x^4+y^4+z^4)$

$\Rightarrow x^4+y^4+z^4 \leq \frac{1}{3}$

Vậy $x^4+y^4+z^4$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{3}$ khi x=y=z=$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 3:

Giải

A = x^2 — 2xy + $3y^2$ — 2x — 10y + 20

$= (x- y -1)^2 + 2(y- 3)^2 + 1$

mà $(x- y -1)^2 \geq 0$ và $(y- 3)^2 \geq 0$

vậy $x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20 \geq 1$

dấu ‘ =’ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-1=0 \\ y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$

Vậy A_{min} =1 khi x= 4 , y = 3

Bài 4:

Giải

Có $D = \dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ xác định với mọi x và luôn dương

Ta có: $A(x^2+1) = x^2 +x +1$

$\Leftrightarrow$ $(A-1)x^2 - x +A -1 =0$

+ Nếu A=1 thì x =0 và ngược lại

+ Nếu $A \neq 1$ muốn tồn tại x thì điều kiện cần và đủ: $1- 4(A-1)^2 \geq 0$

$4A^2 -8A + 3 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq A \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy $A_{max}= \dfrac{3}{2}$ $A_{min}=\dfrac{1}{2}$

(Khi x=1) (khi x=-1)

Bài 5:

Giải

Gọi a là số tự nhiên cần tìm

Ta có a= 29 q +5 =31 q' =28 (q, q' $\in N$)

$\Rightarrow 29(q-q') = 2q' + 23$

$\Rightarrow q-q'$ là số lẻ ; q-q' ≥ 1

A nhỏ nhất khi q' nhỏ nhất. Lúc đó

2q' =29(q-q') -23 cũng nhỏ nhất

Hay q-q' nhỏ nhất

q-q' =1 và 2q' = 29-23 =6

Vậy : q' =3 và a =121 là số cần tìm

II - Giải phương trình và hệ phương trình:

Bài 1:

Giải

Áp dụng : Nếu a, b > 0 thì : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

(2) $\Leftrightarrow (\frac{3}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z})(3x+2y+z)=36$

$\Leftrightarrow 6(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+2(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})=22$

Mặt khác : vì x, y, z > nên $6(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})\geq 12$

Và $3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\geq 6$; $2(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})\geq 4$

Nên $(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})+3(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})+2(\frac{y}{z}+\frac{z}{y})\geq 22$

Dấu " = " xảy ra khi x = y = z , thay vào (1) ta được:

$x + x^2 + x^3 = 14$ <=> $(x - 2)(x^2 + 3x + 7) = 0$

<=> x - 2 = 0 <=> x = 2

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất : x = y = z = 2

Bài 2:

Giải

Ta có $3x^2+6x+19=3.(x^2+2x+1)+16$

$=3.(x+1)^2+16\geq 16$

$5x^2+10x+14=5.(x+1)^2+9\geq 9$

Vậy $4.\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14} \geq 2+3=5$

Dấu (=) xảy ra khi x+1 = 0 $\Rightarrow$ x = -1

Vậy $4\sqrt{3x^2+6x+19}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$ khi x = -1

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = -1

Bài 3:

Giải

Áp dụng BĐT BunhiaCốpski ta có:

$x+\sqrt{2-x^2} \leq \sqrt{1^2+1^2}.\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)} \leq \sqrt{2}.\sqrt{2}=2$

Dấu (=) xảy ra khi x = 1

Mặt khác $4y^2+4y+3=\left(2y+1\right)^2+2 \geq 2$

Dấu (=) xảy ra khi y = $-\frac{1}{2}$

Vậy $x+\sqrt{2-x^2}=4y^2+4y+3=2$ khi x =1 và y =$-\frac{1}{2}$

Vậy nghiệm của phương trình là $\begin{cases} x=1 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bài 4:

Giải

Áp dụng BĐT Cosi ta có:

$$x^4+y^4+z^4=\frac{x^4+y^4}{2}+\frac{y^4+z^4}{2}+\frac{z^4+x^4}{2}$$

$$\geq x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

$$\geq \frac{x^2y^2+y^2z^2}{2}+\frac{z^2y^2+z^2z^2}{2}+\frac{x^2z^2+y^2x^2}{2}$$

$\geq y^2xz + z^2xy + x^2yz$

$\geq xyz.(x+y+z)$

Vì x+y+z = 1 Nên $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz$

Dấu (=) xảy ra khi x = y = z = $\frac{1}{3}$

Vậy $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^4+y^4+z^4=xyz \end{cases}$ có nghiệm x = y = z = $\frac{1}{3}$

Bài 5:

Giải

Từ phương trình (1) $\Rightarrow 8 - y^2 \geq 0$ hay $|y| \leq \sqrt{8}$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x^2 + 2 = |x|.|y| \leq 2\sqrt{2}|x|$

$$\Rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}|x| + \sqrt{2}^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (|x| - \sqrt{2})^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Nếu x = $\sqrt{2}$ thì y = 2$\sqrt{2}$, nếu x = -$\sqrt{2}$ thì y = -2$\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = -2\sqrt{2} \end{cases}$.

III □ Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

Giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x \geq y \geq z$

Ta có $2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{z} \Rightarrow 2z \leq 3$

Mà z nguyên dương vậy z = 1

Thay z = 1 vào phương trình ta được $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

Theo giả sử $x \geq y$ nên 1 = $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{1}{y} \Rightarrow y \leq 2$ mà y nguyên dương

Nên y = 1 hoặc y = 2

Với y = 1 không thích hợp

Với y = 2 ta có x = 2

Vậy (2 ,2,1) là một nghiệm của phương trình

Hoán vị các số trên ta được các nghiệm của phương trình là (2,2,1) ; (2,1,2) ; (1,2,2).