$\rightarrow$OE $\perp$ BD

14. ĐỀ BÌNH ĐỊNH

Cho đường tròn (O;R), hai đường kính AB và CD vuông góc nhau. Trong đoạn thẳng AB lấy điểm M(khác điểm O), đường thẳng CM cắt CM cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N với đường tròn (O) ở điểm P.

a) Chứng minh tứ giác OMNP nội tiếp được trong đường tròn.

b) Tứ giác CMPO là hình gì?

c) Chứng minh tích CM.CN không đổi.

d) Chứng minh khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 4: ***(4,0 điểm)***

a) Chứng minh tứ giác OMNP nội tiếp được trong đường tròn.

Ta có: $\widehat{ONP} = \widehat{OMP} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác OMNP nội tiếp được trong đường tròn đường kính OP

b) Tứ giác CMPO là hình gì?

Ta có: MP//CO (vì cùng vuông góc với AB)   (1)

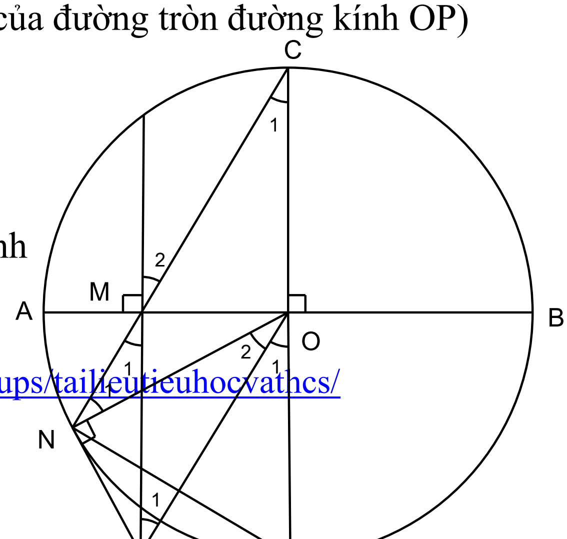
$\Rightarrow \widehat{P_1} = \widehat{O_1}$ (cặp góc so le trong)

Ta có: $\widehat{P_1} = \widehat{N_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung MO của đường tròn đường kính OP)

Lại có: $\widehat{C_1} = \widehat{N_1}$ (vì tam giác ONC cân tại O)

Do đó: $\widehat{C_1} = \widehat{O_1} \Rightarrow$ MC//PO (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Tứ giác CMPO là hình bình hành



hoc360.net

c) Chứng minh tích CM.CN không đổi.

Ta có: $\widehat{DNC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét: ΔCND và ΔCOM có:

$\widehat{DNC} = \widehat{COM} = 90^0$ và $\widehat{C_1}$: chung

$\Rightarrow \Delta CND \sim \Delta COM\left(g-g\right) \Rightarrow \dfrac{CN}{CO} = \dfrac{CD}{CM}$

$\Rightarrow CN.CM = CO.CD = R.2R = 2R^2$: không đổi

d) Chứng minh khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đường thẳng cố định.

Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{O_1}\left(cmt\right)$ $\widehat{O_2} = \widehat{N_1}$ (so le trong và MC//OP)

Mà: $\widehat{C_1} = \widehat{N_1}$ (cmt) Do đó: $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$

Xét: ΔPDO và ΔPNO có: ON = OD(= R); $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (cmt); OP: cạnh chung

$\Rightarrow \Delta$PDO = ΔPNO(c – g – c) $\Rightarrow \widehat{PDO} = \widehat{PNO} = 90^0 \Rightarrow PD \perp CD$

Mà: C, D là hai điểm cố định $\Rightarrow$ đường thẳng PD cố định

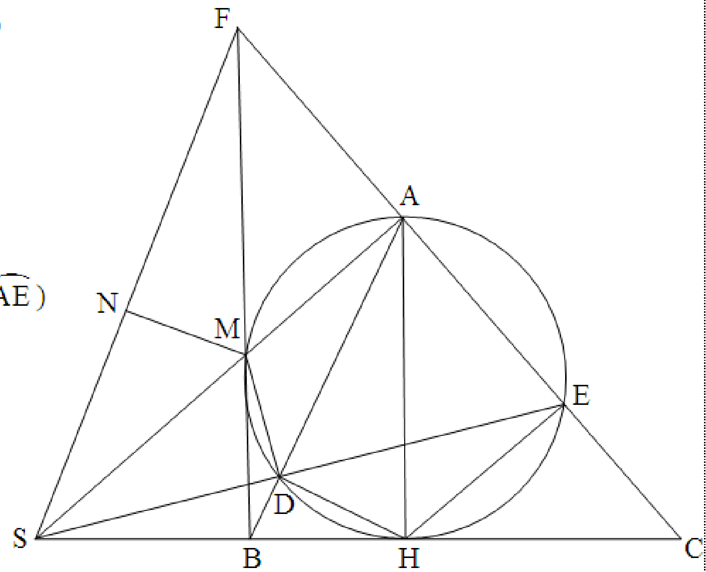
Vậy: khi M di động trên đoạn thẳng AB thì P chạy trên một đường thẳng PD cố định.

15. ĐỀ CHUYÊN HÀ TĨNH

Bài 4 : Cho ΔABC nhọn (AB < AC) có AH vuông góc với BC tại H. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB và AC. Đường thẳng DE cắt tia CB tại S.

a) Chứng minh rằng các tứ giác ADHE, BCED nội tiếp được đường tròn.

b) Đường thẳng SA cắt đường tròn đường kính AH tại M. Các đường thẳng BM và AC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng FA. FC + SB. SC = SF^2



Bài 4: a) Ta có $\begin{cases} AD \perp DH(gt) \\ AE \perp EH(gt) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{ADH} = 90^0 \\ \widehat{AEH} = 90^0 \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Suy ra tứ giác ADHE nội tiếp

(Tổng 2 góc đối bằng 180^0)

Mặt khác, $\widehat{C} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ với $\widehat{EHC}$)

$\widehat{AHE} = \widehat{ADE}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{ADE}$ mà (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{EDB} = 180^0$. Suy ra tứ giác BDEC nội tiếp (Tổng 2 góc đối bằng 180^0)

b) Theo câu a ta có tứ giác BDEC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{EDB} = 180^0$

mà $\widehat{SDB} + \widehat{EDB} = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{SDB}$. Xét ΔSDB và ΔSCE có

$\begin{cases} \widehat{C} = \widehat{SDB} \\ \widehat{S} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SDB \sim \Delta SCE\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{SB}{SE} = \dfrac{SD}{SC} \Rightarrow SB.SC = SD.SE$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\Delta SMD \sim \Delta SEA\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{SM}{SE} = \dfrac{SD}{SA} \Rightarrow SD.SE = SM.SA$

Từ đó suy ra $SB.SC = SM.SA$ (1) $\Rightarrow \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SM}{SC}$

Xét ΔSMB và ΔSCA có $\begin{cases} \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SM}{SC} \\ \widehat{S} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta SMB \sim \Delta SCA\ (g-g) \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{SMB}$

mà $\widehat{SMB} + \widehat{AMB} = 180^0$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{AMB} = 180^0$ nên tứ giác AMBC nội tiếp (Tổng 2 góc đối bằng 180^0).

Chứng minh tương tự như trên ta có $\Delta FMA \sim \Delta FCB\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{FA}{FB} = \dfrac{FM}{FC} \Rightarrow FA.FC = FM.FB$ (2)

Trên SF ta lấy điểm N sao cho $\widehat{FNM} = \widehat{MBS}$ ta có: $\widehat{FNM} + \widehat{MNS} = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{MBS} + \widehat{MNS} = 180^0$

Ta lại có $\widehat{MBH} + \widehat{MAC} = 180^0$ (Vì tứ giác AMBC nội tiếp) mà $\widehat{MBH} + \widehat{MBS} = 180^0$ (kề bù)

$\Rightarrow \widehat{MBS} = \widehat{MAC}$ mà $\widehat{FNM} = \widehat{MBS}$ $\Rightarrow \widehat{FNM} = \widehat{MAC}$. Từ đó suy ra $\widehat{FNM} + \widehat{FAM} = 180^0$ nên tứ giác FAMN nội tiếp (Tổng 2 góc đối bằng 180^0).

Chứng minh tương tự như trên ta lại có

$\Delta FNM \sim \Delta FBS\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{FN}{FB} = \dfrac{FM}{FS} \Rightarrow FN.FS = FM.FB$ (3)

$\Delta SNM \sim \Delta SAF\ (g-g) \Rightarrow \dfrac{SN}{SA} = \dfrac{SM}{SF} \Rightarrow SN.SF = SM.SA$ (4)

Từ (1); (2); (3) và (4) ta có

$FA.FC + SB.SC = FM.FB + SM.SA = FN.FS + SN.SF = SF(FN + SN) = SF^2$ (đpcm)

16 . ĐỀ THÁI NGUYÊN

Bài 9: *(1 điểm)* Cho đường tròn (I,R), biết $R = 3cm$. Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MA, MB đến đường tròn (A,B là các tiếp điểm). Cho biết diện tích tứ giác $MAIB$ là $12cm^2$. Tính độ dài đoạn thẳng MI.

Bài 10: *(1 điểm)* Cho đường tròn (O,R) và dây cung CD cố định không đi qua O, cho A và B di động trên cung lớn CD sao cho CA và DB luôn song song với nhau. Gọi M là giao điểm AD và BC. CMR:

a) Các điểm C, D, O, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) $OM \perp BD$

17. ĐỀ CHUYÊN HÀ NỘI

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC không phải là tam giác cân. Đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Đường thẳng NP cắt các đường thẳng BO, CO lần lượt tại E, F.

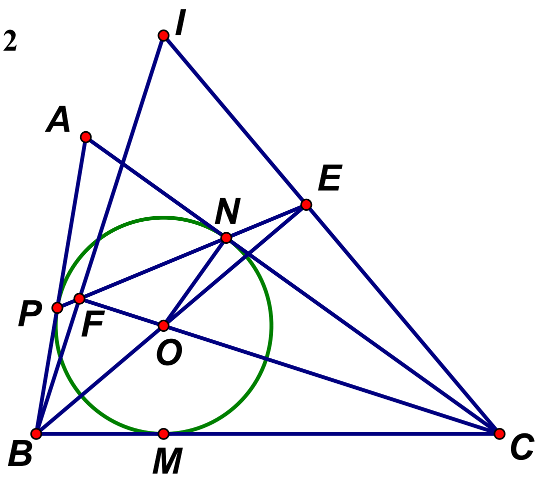
1) Chứng minh hai góc $\widehat{OEN}$ và $\widehat{OCA}$ bằng nhau hoặc bù nhau.
2) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.
3) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF. Chứng minh ba điểm O, M, K thẳng hàng.

Bài V (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng cho sáu điểm $A_1, A_2, A_3,\ldots A_6$ trong đó không có ba điểm nào thẳng hàng. Với ba điểm bất kỳ trong số sáu điểm này luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 671. Chứng minh trong số $A_1, A_2, A_3,\ldots A_6$ đã cho, luôn tìm được ba điểm là ba đỉnh của một tam giác có chu vi nhỏ hơn 2013

HD:

Hình 2



Chứng minh tứ giác BCEF là tứ giác nội tiếp (1 điểm)
Từ chứng minh trên suy ra 4 điểm O, N, E, C cùng thuộc một đường tròn $\Longrightarrow \widehat{BEC} = \widehat{ONC} = 90^0$ (1) Tương tự 4 điểm O,P,F,B cùng thuộc một đường tròn$\Longrightarrow \widehat{BFC} = \widehat{OPB} = 90^0$(2). Từ (1) và (3) suy ra BCEF là tứ giác nội tiếp ***Chứng minh O,M,K thẳng hàng (1 điểm)*** Gọi I là giao điểm của CE và BF. Bốn điểm O,N,E,C thuộc một đường tròn $\Longrightarrow$ $\widehat{OCE} = \widehat{ONC} = 90^0 \Longrightarrow BE \perp CI$ Tương tự CF⊥BI⟹O là trực tâm của tam giác IBC⟹I,O,M thẳng hàng (3) Tứ giác OEIF nội tiếp đường tròn đường kính OI ⟹I,O,K thẳng hàng (4) Từ () và () suy ra O,M,K thẳng hàng
Chứng minh rằng tồn tại tam giác … (1 điểm) Với A_i, A_k bất kỳ ($1 \leq i < k \leq 6$) ta quy định : + Nếu $A_iA_k < 671$ thì Ai, Ak được nối với nhau bởi đoạn thẳng màu xanh +Nếu $A_iA_k \geq 671$ thì Ai, Ak được nối với nhau bởi đoạn thẳng màu đỏ

Xét 5 đoạn thẳng A_1A_2, A_1A_3, …A_1A_6. Theo nguyên lý Diriclet, tồn tại 3 đoạn thẳng cùng màu. Không mất tính tổng quát, giả sử ba đoạn đó là A_1A_2, A_1A_3,A_1A_4

Trường hợp 1: ba đoạn A_1A_2, A_1A_3,A_1A_4 cùng màu xanh. Do tồn tại một canh trong $\Delta A_2A_3A_4$ có màu xanh, chẳng hạn $A_2A_3 \Rightarrow \Delta A_1A_2A_3$ thỏa mãn điều kiện

Trường hợp 2: Ba đoạn A_1A_2, A_1A_3,A_1A_4 cùng màu đỏ $\Rightarrow \Delta A_2A_3A_4$ thỏa mãn điều kiện

18. ĐỀ ĐỒNG THÁP

Câu 6 : (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn *(O),* bán kính R , $BC = a$, với a và R là các số thực dương . Gọi I là trung điểm của cạnh BC . Các góc $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ đều là góc nhọn .

1) Tính OI theo a và R .

2) Lấy điểm D thuộc đoạn AI , với D khác A , D khác I . Vẽ đường thẳng qua D song song với BC cắt cạnh AB tại điểm E . Gọi F là giao điểm của tia CD và đường tròn *(O)* , với F khác C .

Chứng minh tứ giác $ADEF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn .

3) Gọi J là giao điểm của tia AI và đường tròn *(O)* , với J khác A .

Chứng minh rằng $AB.BJ = AC.CJ$.

HD

1) Tính OI theo a và R :Ta có : I là trung điểm của BC (gt)

Nên IB = IC $= \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$ và $OI \perp BC$ (liên hệ đường kính và dây)

Xét ΔOIC vuông tại I : Áp dụng định lý Pytago tính được : OI = $\dfrac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$

2 ***)Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nội tiếp đường tròn :***

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ (đồng vị) Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (cùng nội tiếp chắn $\overparen{AC}$)

Suy ra : $\widehat{AED}=\widehat{AFC}$ hay $\widehat{AED}=\widehat{AFD}$ Tứ giác $ADEF$ có : $\widehat{AED}=\widehat{AFD}$ (cmt)

Nên tứ giác $ADEF$ nội tiếp được đường tròn (E, F cùng nhìn AD dưới 2 góc bằng nhau)

3) Chứng minh rằng AB.BJ = AC.CJ :

Chứng minh $\Delta AIC \backsim \Delta BIJ$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AI}{BI}=\frac{AC}{BJ}$ (1)

Chứng minh $\Delta AIB \backsim \Delta CIJ$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AI}{CI}=\frac{AB}{CJ}$ (2)

Mà BI = CI (I là trung điểm BC) (3)

Từ (1) , (2) , (3) suy ra : $\frac{AB}{CJ}=\frac{AC}{BJ} \Rightarrow AB.BJ=AC.CJ$

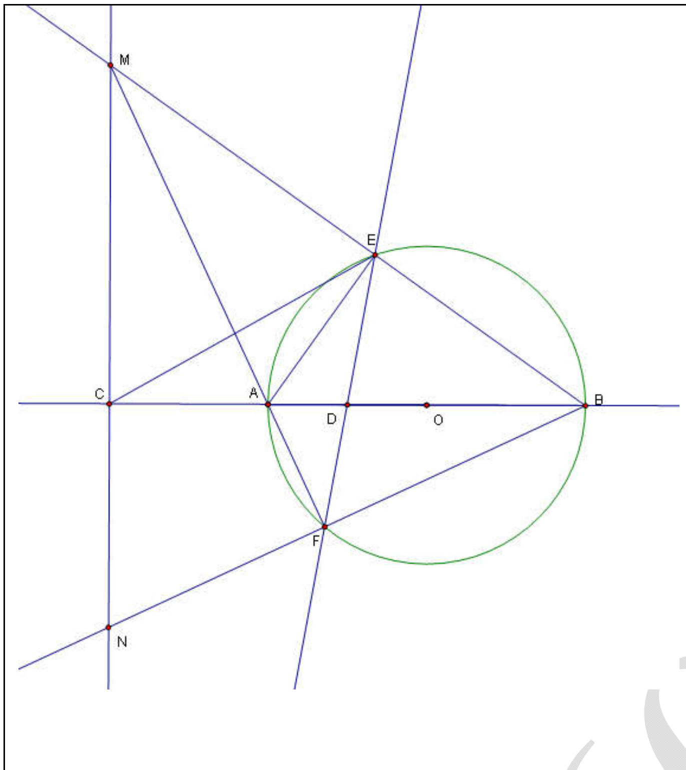
19. ĐỀ BẮC GIANG

Câu IV (3 điểm) Cho đường tròn (O;R) đường kính AB cố định. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C sao cho AC=R. Kẻ đường thẳng d vuông góc với BC tại C. Gọi D là trung điểm của OA; qua D vẽ dây cung EF bất kỳ của đường tròn (O;R), (EF không là đường kính). Tia BE cắt d tại M, tia BF cắt d tại N.

1. Chứng minh tứ giác MCAE nội tiếp.
2. Chứng minh BE.BM = BF.BN
3. Khi EF vuông góc với AB, tính độ dài đoạn thẳng MN theo R.
4. Chứng minh rằng tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi dây cung EF thay đổi.

HD

hoc360.net



a) Ta có góc AEB = 90^0(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => góc AEM =90^0 (vì góc này kề bù với góc AEB)

Xét tứ giác MCAE có:

góc ACM =90^0 (gt)

góc AEM =90^0 (CM trên)

=> góc ACM =90^0 +góc AEM =180^0 mà hai góc này ở vị trí đối diện nhau

=> tứ giác MCAE nội tiếp.

b) Chứng minh ΔBAE đồng dạng tam giác ΔBMC => BE.BM = BA.BC (1)

Chứng minh ΔBAF đồng dạng với ΔBNC => BF.BN = BA.BC (1)

Từ (1) và (2) => BE.BM = BF.BN

Cách 2: Góc BMN = góc BAE (cùng bù với góc CAE)

mà góc BAE = góc EFN (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)

=> Góc BMN = góc EFN

Xét ΔBEF đồng dạng với ΔBNM => BE.BM = BF.BN

c) Áp dụng định lí Py-ta-go vào tam giác EDO vuông tại O ta có DE = $\frac{\sqrt{3}}{2}$R

=> DE =R$\sqrt{3}$

Vì EF vuông góc với BC và D là trung điểm của BC nên ta sẽ chứng minh được EF là đường trung bình của tam giác BMN => EF =2R$\sqrt{3}$.

d) Gọi A' là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và tia AB

Ta chứng minh được E,A,N và M, A, F thẳng hàng

=> A đối xứng với A' qua C => B đối xứng với A' qua điểm A mà A' cố định

=> Tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BA'.

20. ĐỀ CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH

Bài 3: (*3 điểm*) Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K. Kẻ đường kính AD.

Chứng minh rằng: a) Ba diểm K, A, D thẳng hàng.

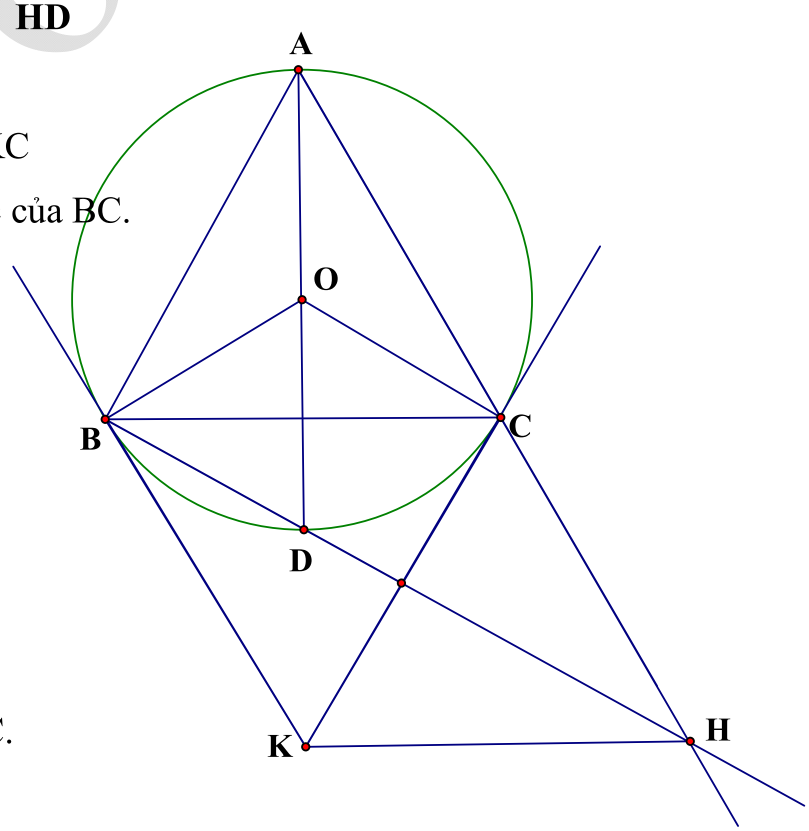
b) Bốn điểm A, B, K, H cùng thuộc một đường tròn, với H la fgiao điểm của BD và AC.

c) KH song song với BC.

Bài 4: (*1 điểm*) Giả sử AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi diện tích tam giác DEF bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC.

HD

Bài 3.



a) Ta có AB = AC; OB = OC; KB = KC

=> A, O, K nằm trên đường trung trực của BC.

Mà D thuộc AD nên D cũng nằm trên đường trung trực của BC

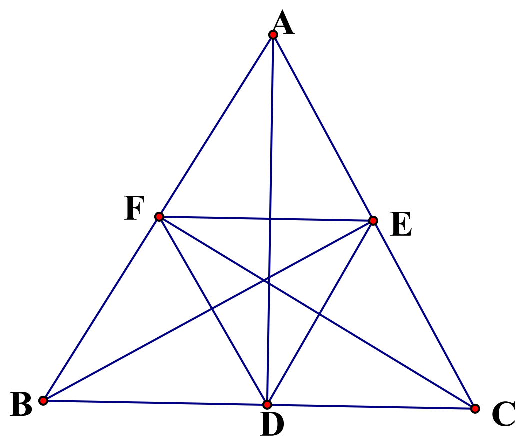
=> A, K, D thẳng hàng.

b)Vì D nằm trên đường trung trực của BC nên AD $\perp$ BC

=> $\widehat{DB} = \widehat{DC}$ => $\widehat{KBH} = \widehat{KAH}$

⇨ Tứ giác BAKH nội tiếp

c) KH // BC vì cùng vuông góc với BC.



Bài 4.

+) Chứng minh điều kiện cần: Cho Tam giác ABC đều, AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC ta cần chứng minh:.

$$\frac{S_{DEF}}{s_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Do tam giác ABCđều và AD, BE, CF là các đường phân giác của tam giác nên ta có

$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}$=> ΔDEF đồng dạng với ΔABC => $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

+) Chứng minh điều kiện đủ: Cho Tam giác ABC, AD, BE và CF là các đường phân giác trong của tam giác, thỏa $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}$, ta cần chứng minh: ΔABC là tam giác đều.

Đặt BC = a; AC = b; AB = c (a, b, c > 0)

Vì AD là phân giác $\widehat{BAC}$ nên ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{DB}{DB+DC} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow \frac{DB}{a} = \frac{c}{c+b} \Rightarrow DB = \frac{ac}{c+b}$$

⇨ DC = a – DB = $a - \frac{ac}{c+b} = \frac{ab}{c+b}$

Chứng minh tương tự ta có: EC = $\frac{ab}{a+c}$; EA = $\frac{bc}{a+c}$; FA = $\frac{bc}{a+b}$; FB = $\frac{ca}{a+b}$.

Ta có $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC} - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} - \frac{S_{CDE}}{S_{ABC}}$ = 1 -

$\frac{AF.AE}{AB.AC} - \frac{BF.BD}{BA.BC} - \frac{CE.CD}{CA.CB} = \ldots =$

$\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$ theo giả thiết ta có: $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{4}$

⇨ (a +b)(b + c)(c + a) = 8abc ⇔ $a(b-c)^2 + b(c - a)^2 + c(b - a)^2 = 0$

⇨ a = b = c => ∆ABC là tam giác đều.

Vậy ......

21. ĐỀ AN GIANG

Bài 4. (3,0 điểm) *Cho đường tròn tâm O đường kính AB ; C là một điểm trên đường tròn sao cho số đo cung AC gấp đôi số đo cung CB.Tiếp tuyến tại B với đường tròn (O) cắt AC tại E.Gọi I là trung điểm của dây AC.*

a.Chứng minh rằng tứ giác IOBE nội tiếp.

b.Chứng minh rằng $EB^2 = EC \cdot EA$.

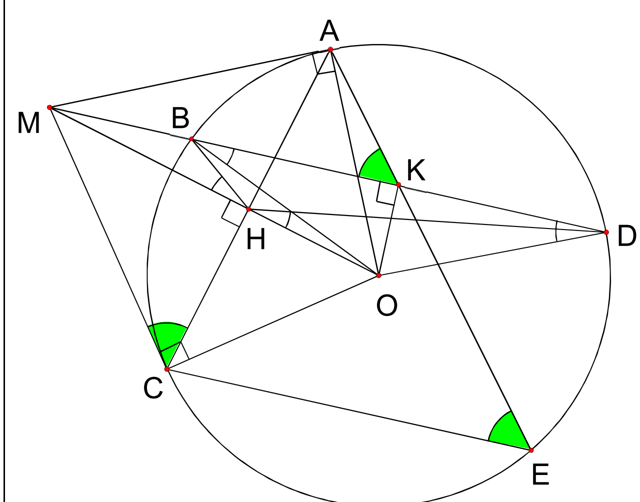
c.Biết bán kính đường tròn (O) bằng 2 cm, tính diện tích tam giác ABE .

22. ĐỀ CHUYÊN VĨNH PHÚC

Câu 4 (*3,0 điểm*).Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ điểm M kẻ hai tiếp tuyến MA, MC (A, C là các tiếp điểm) tới đường tròn (O). Từ điểm M kẻ cát tuyến MBD (B nằm giữa M và D, MBD không đi qua O). Gọi H là giao điểm của OM và AC. Từ C kẻ đường thẳng song song với BD cắt đường tròn (O) tại E (E khác C), gọi K là giao điểm của AE và BD. Chứng minh:

a) Tứ giác $OAMC$ nội tiếp.

b) K là trung điểm của BD.



hoc360.net

c) AC là phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

HD: Tứ giác $OAMC$ nội tiếp.

Do *MA, MC* là tiếp tuyến của *(O)* nên $OA \perp MA, OC \perp MC \Rightarrow \widehat{OAM} = \widehat{OCM} = 90^0$

$\Rightarrow \widehat{OAM} + \widehat{OCM} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác *OAMC* nội tiếp đường tròn đường kính *OM.*

K là trung điểm của *BD.*

Do *CE // BD* nên $\widehat{AKM} = \widehat{AEC}$, $\widehat{AEC} = \widehat{ACM}$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$) $\Rightarrow \widehat{AKM} = \widehat{ACM}$. Suy ra tứ giác $AKCM$ nội tiếp.

Suy ra 5 điểm *M, A, K, O, C* cùng thuộc đường tròn đường kính *OM* $\Rightarrow \widehat{OKM} = 90^0$ hay *OK* vuông góc với *BD.* Suy ra *K* là trung điểm của *BD.*

AH là phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

Ta có: $MH.MO = MA^2$, $MA^2 = MB.MD$ (Do $\Delta MBA, \Delta MAD$ đồng dạng) $\Rightarrow MH.MO = MB.MD$

$\Rightarrow \Delta MBH, \Delta MOD$ đồng dạng $\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{ODM} \Rightarrow$ tứ giác *BHOD* nội tiếp$\Rightarrow \widehat{MHB} = \widehat{BDO}$ (1)

Tam giác *OBD* cân tại *O* nên $\widehat{BDO} = \widehat{OBD}$ (2)

Tứ giác *BHOD* nội tiếp nên $\widehat{OBD} = \widehat{OHD}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MHB} = \widehat{OHD} \Rightarrow \widehat{BHA} = \widehat{DHA} \Rightarrow$ *AC* là phân giác của góc $\widehat{BHD}$.

23.TUYỂN SINH LỚP 10 THPT NGUYỄN BÌNH – QUẢNG NINH

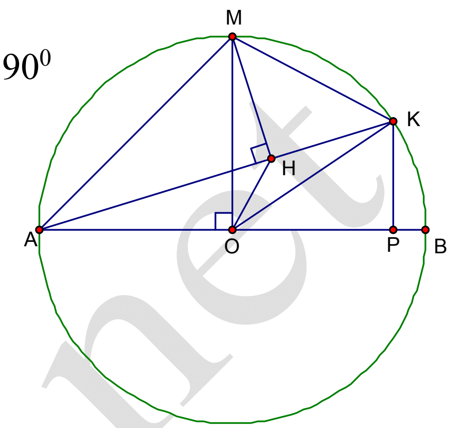
Câu IV *(3 điểm)* Cho đường tròn tâm O đường kính AB, M là điểm chính giữa của cung AB, K là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ BM. Gọi H là chân đường vuông góc của M xuống AK

a) Chứng minh rằng AOHM là tứ giác nội tiếp
b) Tam giác MHK là tam giác gì? Vì sao?
c) Chứng minh OH là tia phân giác của góc MOK

hoc360.net

d) Gọi P là hình chiếu vuông góc của K lên AB. Xác định vị trí của K để chu vi tam giác OPK lớn nhất

HD:

<table>
<tr><td>Hình vẽ: 0,25
Vì M là điểm chính giữa của cung AB, nên sđ $\overset{\frown}{AM} = 90^0$
=> $A\hat{O}M = 90^0$ (đ/l góc ở tâm), mà MH ⊥ AK (gt)
=> $\widehat{AHM} = 90^0$ Trong tứ giác AOHM,
ta có: $A\hat{O}M = \widehat{AHM} = 90^0$
Do đó đỉnh O và H luôn nhìn đoạn Am dưới một góc 90^0, nên AOHM là tứ giác nội tiếp

</td></tr>
<tr><td>Xét tam giác vuông MHK có $\widehat{MKH} = 45^0$ Nên ΔMHK vuông cân tại H</td></tr>
<tr><td>Vì tam giác MHK cân tại H nên : HM = HK
Xét Δ MHO và Δ KHO có HM = HK (c/m trên) HO cạnh chung
OM = OK = R Suy ra Δ MHO = Δ KHO (c-c-c)
Nên $\widehat{MOH} = \widehat{KOH}$, Do vậy OH là phân giác của góc MOK</td></tr>
<tr><td>Ta có chu vi của tam giác OPK là: C = OP + PK + OK. Mà OK không đổi, nên chu vi tam giác OPK lớn nhất ⇔ OP + PK lớn nhất
Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski ta có
$(OP + PK)^2 \le (1^2 + 1^2)(OP^2 + PK^2) = 2R^2$. Vậy $(OP + PK)^2$ lớn nhất bằng $2R^2$, nên OP + PK lớn nhất bằng $\sqrt{2}R$. Do đó chu vi của tam giác OPK lớn nhất bằng:
$\sqrt{2}R + R = (\sqrt{2}+1)R$, khi OP = PK hay K là điểm chính giữa của cung MB</td></tr>
</table>

ĐỀ ĐỒNG NAI

Câu 6. (3 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, BC = a, với a và R là các số thực dương. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Các góc $\widehat{CAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCA}$ đều là góc nhọn.

1) Tính OI theo a và R.

2) Lấy điểm D thuộc đoạn AI, với D khác A, D khác I. Vẽ đường thẳng qua D song song với BC cắt cạnh AB tại điểm E. Gọi F là giao điểm của tia CD và đường tròn (O), với F khác C. Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nội tiếp đường tròn.

3) Gọi J là giao điểm của tia AI và đường tròn (O), với J khác A. Chứng minh rằng AB.BJ = AC.CJ.

HD

Câu 6 : (3,0 điểm)

1) Tính OI theo a và R: Ta có : I là trung điểm của BC (gt)

Nên IB = IC $= \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ và $OI \perp BC$ (liên hệ đường kính và dây)

Xét ΔOIC vuông tại I có : $OC^2 = OI^2 + IC^2$ *(* định lý Pytago)

$\Rightarrow OI^2 = OC^2 - IC^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4R^2 - a^2}{4} \Rightarrow OI^2 = \frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$

2 ***)Chứng minh tứ giác ADEF là tứ giác nội tiếp đường tròn :***

Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{AED}$ (đồng vị)Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (cùng nội tiếp chắn $\overset{\frown}{AC}$)

Suy ra : $\widehat{AED} = \widehat{AFC}$ hay $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$ Tứ giác $ADEF$ có : $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$ (cmt)

Nên tứ giác $ADEF$ nội tiếp được đường tròn

(E , F cùng nhìn AD dưới 2 góc bằng nhau)

3) Chứng minh rằng AB.BJ = AC.CJ :

Xét ΔAIC và ΔBIJ có :

$\widehat{AIC} = \widehat{BIJ}$ (đối đỉnh)

$\widehat{IAC} = \widehat{IBJ}$ (cùng nội tiếp chắn $\overset{\frown}{CJ}$)

Vậy $\Delta AIC \backsim \Delta BIJ$ (g-g)

$\frac{AI}{BI} = \frac{AC}{BJ}$ (1)

Chứng minh $\Delta AIB \backsim \Delta CIJ$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CJ}$ (2)

Mà BI = CI (I là trung điểm BC) (3)

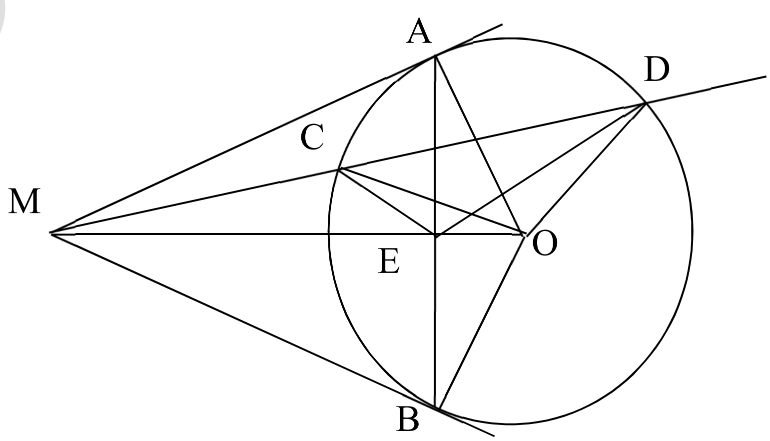
Từ (1) , (2) , (3) suy ra : $\frac{AB}{CJ} = \frac{AC}{BJ} \Rightarrow AB.BJ = AC.CJ$

24. ĐỀ NINH BÌNH

Câu 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn tâmO, bán kính R. M là một điểm nằm ngoài đường tròn. Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (A, B là hai tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của AB và OM.

1. Chứng minh tứ giác MAOB là tứ giác nội tiếp.
2. Tính diện tích tam giác AMB, biết OM = 5 và R = 3.
3. Kẻ Mx nằm trong tam góc AMO cát đường tròn tại hai điểm phân biệt C và D (C nằm giữa M và D). Chứng minh rằng EA là phân giác của góc CED.

HD



hoc360.net

3. – Chứng minh ΔMAO vuông tại A, Đường cao AE

$\Rightarrow$ME.MO = MA^2 $\Rightarrow$ ME.MO = MC.MD(= MA^2)

$\Rightarrow \frac{ME}{MD} = \frac{MC}{MO}$, mà ΔMDO và ΔMEC có góc M chung nên hai tam giác đồng dạng

$\Rightarrow \widehat{MEC} = \widehat{MDO}$

Từ đó suy ra tứ giác ECDO nội tiếp vì có $\widehat{CDO} + \widehat{CEO} = \widehat{CEM} + \widehat{CEO} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{OED} = \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{CEM}$

$\Rightarrow$ CEA = DEA (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)$\Rightarrow$ EA là phân giác của CED

25 . ĐỀ TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN BẾN TRE

NĂM HỌC 2013 – 2014

Câu 4 (7,0 điểm) Cho đường tròn tâm *O*. Từ một điểm *A* nằm ngoài đường tròn kẻ các tiếp tuyến *AT* và *AS* với đường tròn (*T, S* là các tiếp điểm). Trên cung lớn *TS* lấy điểm *D* sao cho $\widehat{TOD} < \widehat{SOD} < 180^0$. Kẻ các đường cao *TE, SF* và đường trung tuyến *DM* của tam giác *TSD.*

a) Chứng minh rằng:

*) *DE. TA = DT.TM.*

*) $\widehat{DOT} = \widehat{ETM}$.

*)Tam giác *DEM* đồng dạng với tam giác *DTA.*

b) Gọi *N* là giao điểm của *DM* và *EF*; *P* là giao điểm của *AD* và *TS*. Chứng minh rằng *NP* song song với *AM.*

26. ĐỀ HẢI PHÒNG

Bài 3: (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H $\left(D \in BC, E \in AC, F \in AB\right)$.

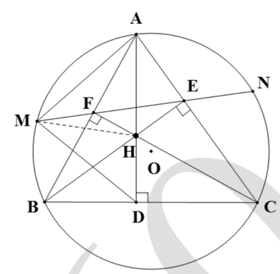
1. Chứng minh các tứ giác BDHF, BFEC nội tiếp.
2. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (F nằm giữa M và E).

Chứng minh: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$.

3. Chứng minh AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MHD.

HD

Vẽ hình đúng để làm câu 1



+ Ta có $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^0$ (vì AD và CF là đường cao của ΔABC)

=> $\widehat{BFH} + \widehat{BDH} = 180^0$. Suy ra tứ giác BDHF nội tiếp

+ Ta có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^0$ (vì BE và CF là đường cao của ΔABC)

Suy ra hai điểm E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC. Hay tứ giác BFEC nội tiếp.

2. (0,75 điểm)

Ta có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{FEC}$) mà $\widehat{AEF} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AM}$ + sđ $\overset{\frown}{NC}$) (góc có đỉnh ở bên trong đường tròn) $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{AN}$ + sđ $\overset{\frown}{NC}$) (góc nội tiếp) Suy ra $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

3. (0,75 điểm) ΔAFH đồng dạng với ΔADB (g.g) => AF.AB = AH.AD (1)

ΔAFM đồng dạng với ΔAMB (g.g) => AM^2 = AF.AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra: AM^2 = AH.AD => ΔAMHđồng dạng với ΔADM (c.g.c)

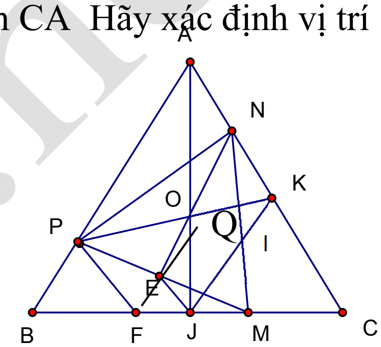
=> $\widehat{AMH} = \widehat{ADM}$ Vậy AM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔMHD.

27. ĐỀ LAM SƠN (Dành cho thí sinh thi chuyên tiếng Nga và Pháp)

Câu 4 :(3 điểm)

Cho Tam giác đều ABC , Trên các cạnh BC; CA; AB lần lượt lấy các điểm M,N,P Sao cho BM=CN=AP

1) Chứng minh:Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP trùng nhau.
2) Gọi I;J;K lần lượt là trung điểm của MN; BC; CA Chứng minh ba điểm I; J; K thẳng hàng
3) Khi M di đông trên đoạn BC và N di động trên đoạn CA Hãy xác định vị trí các điểm M; N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất.



HD

Lưu ý rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cũng là trọng tâm của nó, hãy thực hiện các bước sau:

chứng minh: tam giác MNP đều

-kẻ MF// AC (như hình vẽ) NE là trung tuyến

- chứng minh: PF= AN suy ra JE//= $\frac{1}{2}$ AN

Nhờ Ta lét Suy ra $\frac{EO}{ON} = \frac{JO}{OA} = \frac{1}{2}$ từ đó suy ra O là trọng tâm trung của hai tam giác đều suy ra điều cần chứng minh.

b) Kẻ PQ ?? AB (Q$\in$ AC) chứng minh cho CQ= AN suy ra KN= KQ

mà KJ // MQ nên KJ đi qua trung điểm I của MN

C)Đặt $\frac{CM}{CB} = k (0 \le k \le 1)$ thì $\frac{CN}{CA} = 1 - k$ từ đó tính được

S_{MNP}= S_{ABC} -3k(1-k).$S_{ABC} \geq (1-\frac{3}{4}(k+1-k)^2)$ S_{ABC} $=\frac{1}{4}$ S_{ABC} dấu bằng xảy ra khi k=1-k hay k= 1/2 vậy $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \geq \frac{1}{4}$ suy ra $\frac{MN}{AB} \geq \frac{1}{2}$ đẳng thức xảy ra khi k=1/2 khi đó M; N là trung điểm của BC và CA

28. ĐỀ THANH HÓA

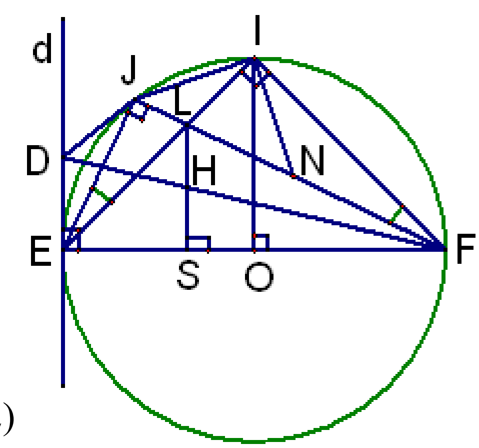
Câu 4: (3,0 điểm): Cho (O;R) đường kính EF. Bán kính IO vuông góc với EF, gọi J là điểm bất kỳ trên cung nhỏ EI (J khác E và I), FJ cắt EI tại L; Kẻ LS vuông góc với EF (S thuộc EF).

a) Chứng minh tứ giác IFSL nội tiếp.

b) Trên đoạn thẳng FJ lấy điểm N sao cho FN = EJ. Chứng minh rằng tam giác IJN vuông cân.

c) Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại điểm E. Lấy D là điểm nằm trên (d) sao cho hai điểm D và I nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng FE và ED.JF = JE.OF. Chứng minh rằng đường thẳng FD đi qua trung điểm của đoạn thẳng LS.

HD



a) Vì I thuộc (O) nên $\widehat{EIF}=90^0$. Vì $LS \perp EF$ nên $\widehat{LSF}=90^0$.

Từ đó suy ra $\widehat{EIF}+\widehat{LSF}=180^0$, do đó tứ giác IFSL nội tiếp.

b) Ta có $IO \perp EF$ nên tam giác IEF là tam giác vuông cân tại I. Suy ra IE=IF (1).

Ta lại có $\widehat{IEJ}=\widehat{IFJ}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{IJ}$) (2)

Theo giả thiết ta có FN=EJ (3)

Từ (1), (2) , (3) suy ra $\Delta IEJ=\Delta IFN$ (c-g-c).

Do đó IJ=IN (4) và $\widehat{EIJ} = \widehat{FIN}$.

Suy ra $\widehat{JIN} = \widehat{EIJ} + \widehat{EIN} = \widehat{FIN} + \widehat{EIN} = \widehat{EIF} = 90^0$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra tam giác IJN vuông cân tại I.

c) Đặt $SE = x \ (0 < x < R)$. Ta có tam giác LES vuông cân tại S nên $LS = x$.

Gọi H là giao điểm của FD và LS. Vì D và L nằm cùng phía đối với EF nên H và L nằm cùng phía đối với S.

Ta có $\Delta FHS \sim \Delta FDE$ (g-g) nên $\frac{HS}{DE} = \frac{SF}{EF} = \frac{2R-x}{2R} \Leftrightarrow HS = \frac{2R-x}{2R}.DE$ (6)

Theo giả thiết $ED.JF = JE.OF \Leftrightarrow \frac{ED}{OF} = \frac{JE}{JF}$ (7).

Ta lại có $\Delta FLS \sim \Delta FEJ$ (g-g) suy ra $\frac{LS}{FS} = \frac{JE}{JF}$ (8).

Từ (7) và (8) suy ra $\frac{ED}{OF} = \frac{LS}{FS} \Leftrightarrow \frac{ED}{R} = \frac{x}{2R-x} \Leftrightarrow ED = \frac{xR}{2R-x}$ (9).

Từ (6) và (9) suy ra $HS = \frac{2R-x}{2R}.\frac{xR}{2R-x} = \frac{x}{2} = \frac{LS}{2}$. Do đó H là trung điểm của đoạn LS.