Bán kính $R = \frac{MN}{2} = \frac{MH + HN}{2} = \frac{8 + 4,5}{2} = 6,25cm$

b) $\widehat{MDN} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), $\widehat{MHE} = 90^0$ (MH⊥AB)

$\Rightarrow \widehat{MDE} + \widehat{MHE} = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác MDEH nội tiếp.

ΔNBE và ΔNDB có góc N chung, $\widehat{NBE} = \widehat{NDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau là cung NA, NB – t/c đường kính và dây cung)

ΔNBE đồng dạng ΔNDB $\Rightarrow \frac{NB}{ND} = \frac{NE}{NB} \Rightarrow NB^2 = NE.ND$

Ta có cung NA bằng cung NB (t/c đường kính và dây cung) ⇒ góc ADE bằng góc EDB ⇒ DE là phân giác trong của ΔABD.

Vì ED ⊥ DC ⇒ Dc là phân giác ngoài Δ ABD

$\Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EB} = \frac{CA}{CB} \Rightarrow AC.BE = BC.AE$

c) Kẻ EI // AM (I∈BM) ⇒ ΔAMB đồng dạng ΔEIB ⇒ ΔEIB cân tại I ⇒ IE = IB.

Gọi (O′) là đường tròn tâm I ngoại tiếp ΔEBD′.

Ta có NB ⊥ BM (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) ⇒ BN ⊥ BI ⇒ BN là tiếp tuyến đường tròn (O′) ⇒ $\widehat{EBN} = \widehat{ED'B}$ (cùng chắn cung BE)

Mặt khác trên đường tròn (O), $\widehat{EBN} = \widehat{EDB}$ (cùng chắn hai cung bằng nhau NA, NB) ⇒ D nằm trên đường tròn (O′)

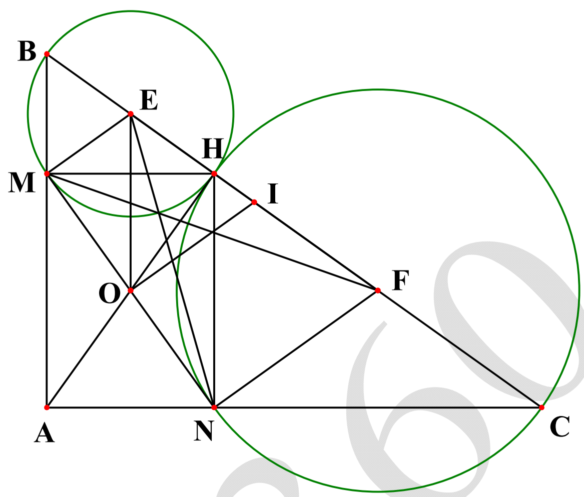
⇒ NB tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE.

Bài 10- Đề Nam Định

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. đường tròn tâm E đường kính BH cắt AB tại M (M khác B), đường tròn tâm F đường kính HC cắt AC tại N (N khác C)

1) Chứng minh AM.AB = AN.AC và AN.AC = MN^2
2) Gọi I là trung điểm của EF, O là giao điểm của AH và MN. Chứng minh IO vuông góc với đường thẳng MN
3) Chứng minh $4(EN^2 + FM^2) = BC^2 + 6AH^2$

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>Ta có: $\widehat{BMH} = \widehat{HNC} = 90^0$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow HM \perp AB$, $HN \perp AC$
Áp dụng hệ thức lượng vào các tam giác vuông AHB và AHC, có:
AH^2 = AM.AB và AH^2 = AN.AC $\Rightarrow$ AM.AB = AN.AC
Mặt khác, tứ giác AMHN có ba góc vuông nên là hình chữ nhật
$\Rightarrow$ AH = MN $\Rightarrow$ AN.AC = MN^2.</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>AMHN là hình chữ nhật, có O là giao điểm của AH và MN
$\Rightarrow$ O là trung điểm của AH và MN
Dễ thấy $\Delta EMO = \Delta EHO$ (c.c.c)
$\Rightarrow \widehat{EMO} = \widehat{EHO} = 90^0 \Rightarrow EM \perp MN$
Chứng minh tương tự được $FN \perp MN$
$\Rightarrow$ ME // NF $\Rightarrow$ MEFN là hình thang vuông</td></tr>
</table>

	Lại có OI là đường trung bình của hình thang vuông MEFN $\Rightarrow OI \perp MN$.
3)	Đặt MN = AH = h; x, y lần lượt là bán kính của (E) và (F). Ta có: $4(EN^2 + FM^2) = 4[(ME^2 + MN^2) + (ME^2 + MN^2)]$ $= 4(x^2 + y^2 + 2h^2)$ $BC^2 + 6AH^2 = (HB + HC)^2 + 6h^2 = HB^2 + HC^2 + 2.HB.HC + 6h^2$ $= 4x^2 + 4y^2 + 2h^2 + 6h^2 = 4(x^2 + y^2 + 2h^2)$ Vậy $4(EN^2 + FM^2) = BC^2 + 6AH^2$.

Bài 11: Đề TP-HCM

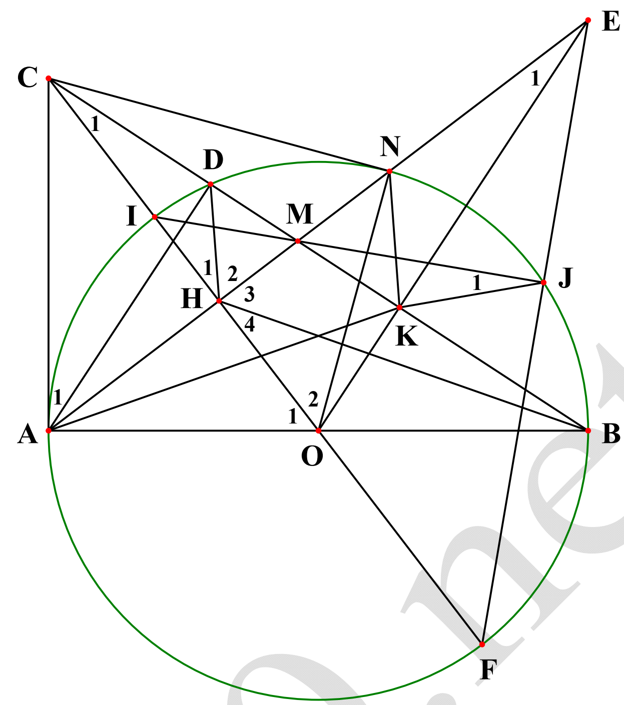
Câu 5. (3,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Đường tròn tâm O đường kính AB cắt các đoạn BC và OC lần lượt tại D và I. Gọi H là hình chiếu của A lên OC; AH cắt BC tại M.

a) Chứng minh: Tứ giác ACDH nội tiếp và $\widehat{CHD} = \widehat{ABC}$.

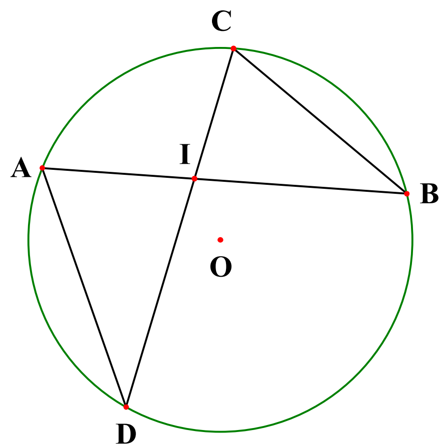
b) Chứng minh: Hai tam giác OHB và OBC đồng dạng với nhau và HM là tia phân giác của góc BHD.

c) Gọi K là trung điểm của BD. Chứng minh: MD.BC = MB.CD và MB.MD = MK.MC.

d) Gọi E là giao điểm của AM và OK; J là giao điểm của IM và (O) (J khác I). Chứng minh: Hai đường thẳng OC và EJ cắt nhau tại một điểm nằm trên (O).

<table>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a)</td><td>Ta có: $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
$\Rightarrow \widehat{ADC} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{ADB}$)
Tứ giác ACDH có $\widehat{AHC} = \widehat{ADC} = 90^0$
$\Rightarrow$ Tứ giác ACDH nội tiếp</td></tr>
<tr><td>Tứ giác ACDH nội tiếp $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{H_1}$
Mà $\widehat{A_1} = \widehat{ABC}$ (cùng phụ với góc ACB)
$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{ABC}$</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông AOC, có:
$OA^2 = OH.OC$
$\Rightarrow OB^2 = OH.OC$ (vì OA = OB)
$\Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$
Δ OHB và Δ OBC có: $\widehat{BOC}$ chung ; $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{OH}{OB}$
$\Rightarrow \Delta OHB \backsim \Delta OBC$ (c.g.c)</td></tr>
</table>

	$\Delta OHB \backsim \Delta OBC \Rightarrow \widehat{H}_4 = \widehat{OBC} \Rightarrow \widehat{H}_4 = \widehat{H}_1 \left(\text{do } \widehat{H}_1 = \widehat{ABC}\right)$ Mà $\widehat{H}_1 + \widehat{H}_2 = \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 \left(= 90^0\right)$ $\Rightarrow \widehat{H}_2 = \widehat{H}_3$ $\Rightarrow$ HM là tia phân giác của góc BHD.
	ΔHBD có HM là đường phân giác trong tại đỉnh H Mà HC $\perp$ HM $\Rightarrow$ HC là đường phân giác ngoài tại đỉnh H Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác, có: $\frac{MD}{MB} = \frac{HD}{HB}$ và $\frac{CD}{CB} = \frac{HD}{HB}$ $\Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow MD.BC = MB.CD$
c)	Gọi N là giao điểm thứ hai của AH và (O). ΔOAN cân tại O, có OH là đường cao $\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \Rightarrow \Delta ONC = \Delta OAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ONC} = \widehat{OAC} = 90^0$ (O) có K là trung điểm của dây BD khác đường kính $\Rightarrow OK \perp BD \Rightarrow \widehat{OKC} = 90^0$ Do đó, 5 điểm A, C, N, K, O cùng thuộc đường tròn đường kính OC Dễ chứng minh bài toán phụ: *Nếu hai dây AB và CD của (O) cắt nhau tại I thì IA.IB = IC.ID.*

	 Áp dụng bài toán trên, ta có: (O) có hai dây AN và BD cắt nhau tại M nên MA.MN = MB.MD Đường tròn đường kính OC có hai dây AN và CK cắt nhau tại M nên MA.MN = MC.MK Do đó MB.MD = MC.MK.
d)	(O) có hai dây AN và IJ cắt nhau tại M nên MA.MN = MI.MJ $\Rightarrow$ MI.MJ = MC.MK $\Rightarrow \frac{MI}{MK} = \frac{MC}{MJ} \Rightarrow \Delta MIC \backsim \Delta MKJ \Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{J}_1$ Mà $\hat{C}_1 = \hat{E}_1 \left(= 90^0 - \widehat{COE} \right) \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{J}_1$ $\Rightarrow$ Tứ giác EJKM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EJM} = \widehat{EKM} = 90^0$ Gọi F là giao điểm thứ hai của CO với (O) $\Rightarrow \widehat{IJF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{EJF} = 180^0 \Rightarrow$ E, J, F thẳng hàng $\Rightarrow$ OC và EJ cắt nhau tại điểm F thuộc (O).

Bài 12: Đề Thanh Hóa-

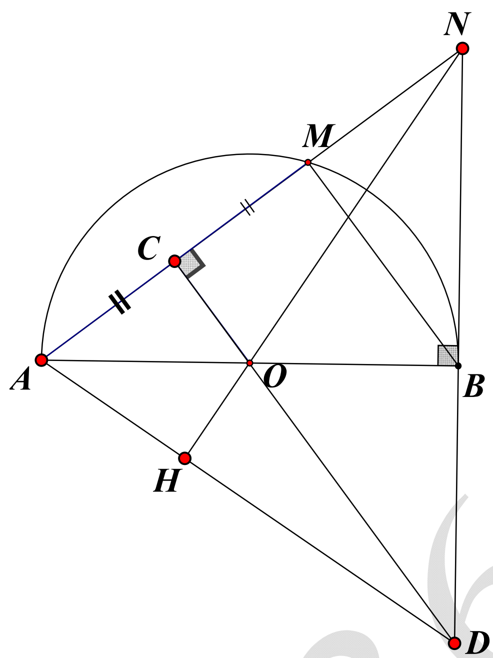
Câu IV:*(3,0 điểm)*

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $MN = 2R$. Gọi (d) là tiếp tuyến của (O) tại N. Trên cung MN lấy điểm E tùy ý (E không trùng với M và N), tia ME cắt (d) tại điểm F. Gọi P là trung điểm của ME, tia PO cắt (d) tại điểm Q.

1. Chứng minh ONFP là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh: $OF \perp MQ$ và $PM.PF = PO.PQ$.

3. Xác định vị trí điểm E trên cung MN để tổng $MF + 2ME$ đạt giá trị nhỏ nhất .



HD

1. Chứng minh tứ giác OBNC nội tiếp:

Ta có $\angle OBN = 90^0$ (Góc tạo bởi tiếp tuyến với đường tròn)

$\angle OCN = 90^0$ (Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm)

Từ đó ta có $\angle OCN + \angle OBN = 180^0$. Mà chúng ở vị trí đối nhau nên ta có tứ giác OBNC nội tiếp

2, Chứng minh ON$\perp AD$, CA.CN=CO.CD

Xét ΔAND có AB và CD là hai đường cao cắt nhau tại O nên NO là đường cao thứ ba của tam giác $\Rightarrow NO \perp AD$ tại H

Xét ΔCAD , ΔCON

có $\angle ACD = \angle OCN = 90^0$, mặt khác $\angle CNO = \angle CDA$ (phụ với góc O)

$\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CON$ nên $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{OC}{CN} \Rightarrow AC.CN = OC.CD \Rightarrow đpcm$

3. Xác định vị trí điểm M trên cung AB để AN+2AM nhỏ nhất

Xét tam giác vuông ABN có AM là đường cao. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông này ta có: $AB^2 = AM.AN$ =4R^2

Áp dụng bất đẳng thức CoSi ta có 2AM+AN$\geq 2\sqrt{2AM.AN} = 2\sqrt{8R^2} = 4.\sqrt{2}R$

Vậy 2AM+AN đạt giá trị nhất là $4.\sqrt{2}R$ khi AN=2AM có nghĩa là M là trung điểm của AN hay M là điểm chính giữa của cung AB

Bài 13: Đề Chuyên Lam Sơn

Câu IV (3.0 điểm):

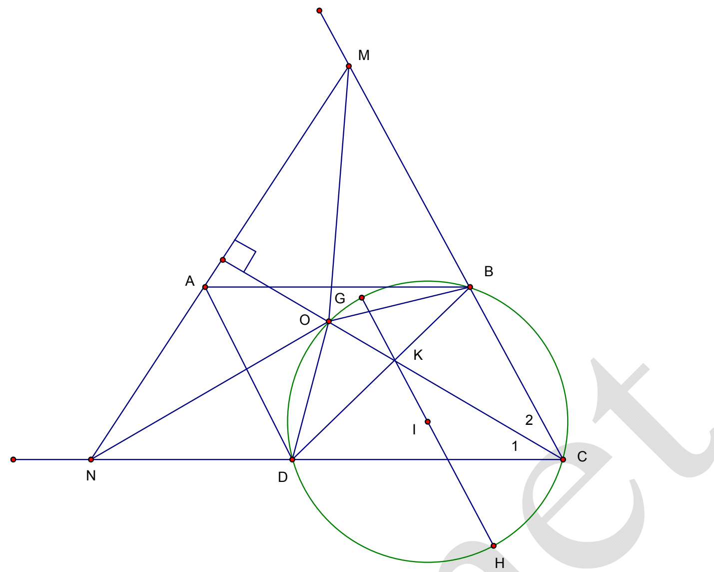
Cho hình bình hành ABCD với $\widehat{BAD} < 90^o$, tia phân giác góc $\widehat{BCD} < 90^o$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại O (Khác C), kẻ đường thẳng (d) đi qua A và vuông góc với CO. Đường thẳng (d) cắt đường thẳng CB, CD lần lượt tại M và N.

a/ Chứng minh $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$

b/ Chứng minh ΔOBM = ΔODC và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

c/ Gọi K là giao điểm của OC và BD, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Chứng minh rằng: $\frac{ND}{MB} = \frac{IB^2 - IK^2}{KD^2}$

Câu IV	**Hình**



a/ Chứng minh $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$; Ta có tứ giác OBCD nội tiếp (gt)

=> $\widehat{OBC} + \widehat{ODC} = 180^o$ (đ/l) (1a) Ta có: $\widehat{OBC} + \widehat{OBM} = 180^o$ (Hai góc kề bù) (2a)

Từ 1a,2a => $\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$ (ĐPCM)

a/ + Chứng minh ΔOBM = ΔODC

xét ΔOBM và ΔODC có: $\widehat{C_1} = \widehat{C_2} => \overset{\frown}{OB} = \overset{\frown}{OD} => OB = OD$ (1b)

$\widehat{OBM} = \widehat{ODC}$ (C/m câu a) (2b)

Do AD//BC (gt) => AD//MC => $\widehat{NAD} = \widehat{NMC}$ (đồng vị) (3b)

Do ΔCMN có đường cao vừa là đường phân giác => $\widehat{MNC} = \widehat{NMC}$ (4b)

Từ 3b, 4b => ΔDAN cân tại D => AD = ND mà CN = CM (Do tam giác CMN cân)

=> CN – ND = CM – BC => BM = DC (5b)

Từ 1b, 2b, 5b => ΔOBM = ΔODC (c.g.c) (ĐPCM)

+ Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN

xét ΔOCM và ΔOCN có

OC là cạnh chung (6b) ; $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (gt) (7b) và CM = CN (c/m trên) (8b)

Từ 6b,7b,8b => ΔOCM = ΔOCN (c.g.c) => OM = ON mà ON = OC

=> OM = ON = OC => O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN (ĐPCM)

c/ Chứng minh rằng: $\dfrac{ND}{MB} = \dfrac{IB^2 - IK^2}{KD^2}$

Gọi giao điểm của IK với đường tròn tâm I là G và H. Ta có

$$\frac{IB^2 - IK^2}{KD^2} = \frac{(IB - IK)(IB + IK)}{KD^2} = \frac{(IG - IK)(IH + IK)}{KD^2} = \frac{KG.KG}{KD^2}$$

mà KG.KH = KD.KB=> $\frac{IB^2 - IK^2}{KD^2} = \frac{KD.KB}{KD^2} = \frac{KB}{KD}$ (1c)

Do ND = AD = BC và MB = CD (chứng minh trên)

=> $\frac{ND}{MB} = \frac{BC}{CD}$ mà $\frac{BC}{CD} = \frac{KB}{KD}$ (Tính chất tia phân giác)=> $\frac{ND}{MB} = \frac{KB}{KD}$ (2c)

Từ 1c, 2c => $\frac{ND}{MB} = \frac{IB^2 - IK^2}{KD^2}$ (ĐPCM)

Bài 14: Đề Tuyển sinh Hà Nội

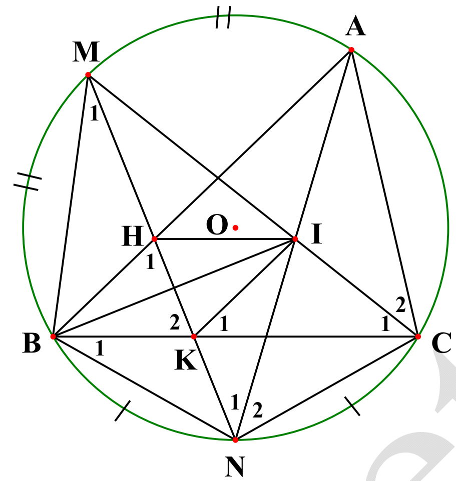
Bài 4: Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.

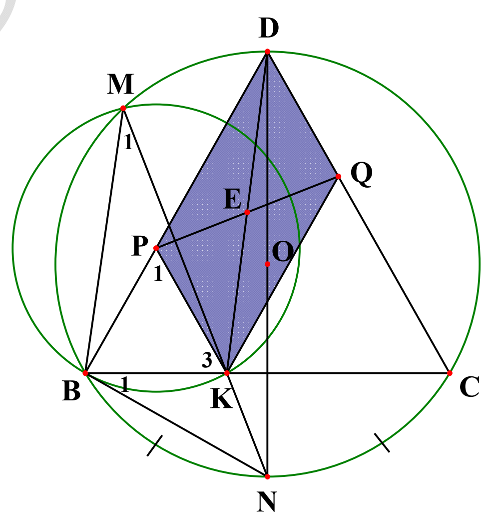
1) Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh NB^2 = NK. NM

3) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.

4) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

		
	1)	Ta có $\widehat{N}_1, \widehat{C}_1$ là các góc nội tiếp chắn lần lượt các cung nhỏ MA, MB Mà $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$ (GT) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{C}_1$ $\Rightarrow$ Bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn (theo bài toán cung chứa góc)
Bài IV (3,5đ)	2)	Ta có $\widehat{B}_1, \widehat{M}_1$ là các góc nội tiếp chắn lần lượt các cung nhỏ NC, NB Mà $\overset{\frown}{NC} = \overset{\frown}{NB}$ (GT) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M}_1$ ΔNBK và ΔNMB có: $\widehat{BNM}$ chung, $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_1$ $\Rightarrow \Delta NBK \backsim \Delta NMB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NB}{NM} = \dfrac{NK}{NB} \Rightarrow NB^2 = NK.NM$
	3)	Xét đường tròn đi qua bốn điểm CNKI có: $\widehat{N}_2 = \widehat{K}_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CI) Mà $\widehat{N}_2 = \widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC của (O)) $\Rightarrow \widehat{K}_1 = \widehat{ABC}$ Do hai góc ở vị trí đồng vị nên KI // BH Chứng minh tương tự ta được HI // BK

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
Tứ giác BHIK có các cạnh đối song song nên là hình bình hành.
<u>Cách 1:</u>
Vì $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}$ nên $\widehat{C_2} = \widehat{C_1}$, hay CM là tia phân giác của góc ACB
Tương tự, AN là tia phân giác của góc BAC
Δ ABC có hai đường phân giác AN và CM cắt nhau tại I
$\Rightarrow$ BI là đường phân giác thứ ba của Δ ABC
Hình bình hành BHIK có BI là đường phân giác của góc B nên là hình thoi.
<u>Cách 2:</u>
Vì $\widehat{H_1}, \widehat{K_2}$ là các góc có đỉnh ở bên trong đường tròn nên:
$\widehat{H_1} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{MA} + sđ\overset{\frown}{NB}}{2}$, $\widehat{K_2} = \dfrac{sđ\overset{\frown}{MB} + sđ\overset{\frown}{NC}}{2}$
$\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{K_2}$ $\left(\text{do } \overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{MB}, \overset{\frown}{NB} = \overset{\frown}{NC}\right)$
$\Rightarrow$ Δ BHK cân tại B $\Rightarrow$ BH = BK
Hình bình hành BHIK có BH = BK nên là hình thoi.
Nhận xét: Phần này có nhiều cách chứng minh.
</td></tr>
<tr><td></td><td>4)</td><td>


(P) có góc M_1 là góc nội tiếp, góc P_1 là góc ở tâm cùng chắn cung BK
$\Rightarrow \widehat{M_1} = \dfrac{1}{2}\widehat{P_1}$
</td></tr>
</table>

		Mà ΔPBK cân tại P (vì PB = PK) $\Rightarrow \widehat{PBK} = \dfrac{180^0 - \hat{P}_1}{2} = 90^0 - \dfrac{1}{2}\hat{P}_1 = 90^0 - \widehat{M}_1$ (1) (O) có đường kính DN đi qua N là điểm chính giữa của cung BC $\Rightarrow DN \perp BC$ và DN đi qua trung điểm của BC $\Rightarrow \Delta DBC$ cân tại D $\Rightarrow \widehat{DBC} = \dfrac{180^0 - \widehat{BDC}}{2} = 90^0 - \dfrac{1}{2}\widehat{BDC}$ Trong (O), dễ thấy $\widehat{M}_1 = \dfrac{1}{2}\widehat{BDC}$ $\Rightarrow \widehat{DBC} = 90^0 - \widehat{M}_1$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{PBK} = \widehat{DBC}$ $\Rightarrow$ ba điểm D, P, B thẳng hàng Lại có $\hat{P}_1 = \widehat{BDC}$ $(= 2\widehat{M}_1)$ và hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ PK // DC Chứng minh tương tự được ba điểm D, Q, C thẳng hàng và QK // DB Do đó, PK // DQ và QK // DP $\Rightarrow$ Tứ giác DPKQ là hình bình hành $\Rightarrow$ E là trung điểm của đường chéo PQ thì E cũng là trung điểm của đường chéo DK Vậy ba điểm D, E, K thẳng hàng. Có thể chứng minh ba điểm D, P, B thẳng hàng theo các cách sau: *Cách 2:* Từ ΔPBK cân và $\widehat{M}_1 = \dfrac{1}{2}\hat{P}_1 \Rightarrow \widehat{PBK} + \widehat{M}_1 = 90^0$ Từ $DN \perp BC \Rightarrow \widehat{DBK} + \widehat{BDN} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{DBK} + \widehat{M}_1 = 90^0$ (do $\widehat{BDN} = \widehat{M}_1$)

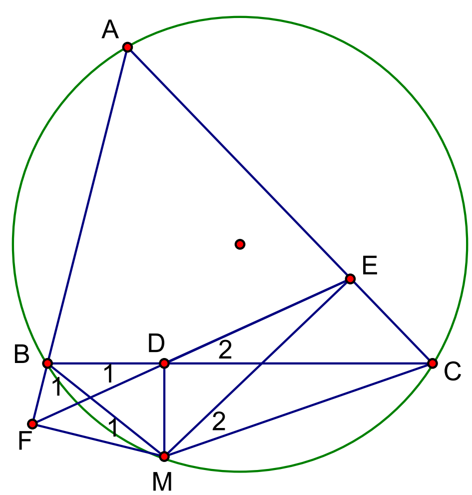
		$\Rightarrow \widehat{PBK} = \widehat{DBK} \Rightarrow$ ba điểm D, P, B thẳng hàng. *Cách 3:* (P) có góc M_1 là góc nội tiếp nên $\widehat{M}_1 = \frac{1}{2}$sđ$\widehat{BK}$ Mà $\widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$ nên $\widehat{B}_1 = \frac{1}{2}$sđ$\widehat{BK}$ Suy ra BN là tiếp tuyến tại B của (P) $\Rightarrow BN \perp PB$ Lại có $\widehat{DBN} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)) $\Rightarrow BN \perp DB$ Do đó ba điểm D, P, B thẳng hàng.

BÀI 15: Cho tam giác ABC (AB<AC) nội tiếp đường tròn tâm O. M là điểm nằm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) Bốn điểm M, B, D, F cùng thuộc một đường tròn và bốn điểm M, D, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh D, E, F thẳng hàng.

c) $\frac{BC}{MD} = \frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF}$



Chứng minh:Ta có: MF $\perp$ AB nên $\widehat{MFB} = 90^0$

MD $\perp$ BC nên $\widehat{MDB} = 90^0$

Tứ giác MDBF có $\widehat{MFB} + \widehat{MDB} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Do đó tứ giác MDBF nội tiếp

Suy ra 4 điểm M, D, B, F cùng thuộc 1 đường tròn.

Ta có : MD $\perp$ BC nên $\widehat{MDC} = 90^0$

MF $\perp$ AC nên $\widehat{MFC} = 90^0$

Suy ra $\widehat{MDC} = \widehat{MFC} = 90^0$

Suy ra D, F cùng nhìn MC dưới 1 góc bằng nhau.

Do đó 4 điểm M, D, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì tứ giác MDBF nội tiếp

Nên: $\widehat{M_1} = \widehat{D_1}$ (cùng chắn cung BF)   Vì tứ giác MDEC nội tiếp nên

$\widehat{M_2} = \widehat{D_2}$

Mặt khác tứ giác MBAC nội tiếp   Nên $\widehat{B_1} = \widehat{C}$ (góc ngoài của tứ giác nội tiếp)

Do đó $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ (cùng phụ với $\widehat{B_1}; \widehat{C}$) Suy ra: $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ Mà $\widehat{D_2} + \widehat{BDE} = 180^0$ Nên

$\widehat{D_1} + \widehat{BDE} = 180^0$

Hay D, E, F thẳng hàng.

c)Ta có $\frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} = \frac{AE+EC}{ME} + \frac{AF-FC}{MF} = \frac{AE}{ME} + \frac{EC}{ME} + \frac{AF}{MF} - \frac{FC}{MF}$

$= \tan\widehat{AME} + \tan\widehat{M_2} + \tan\widehat{AMF} - \tan\widehat{M_1}$

Mà $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ nên $\frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} = \tan\widehat{AME} + \tan\widehat{AMF}$

Mat khac: tứ giác AFME nội tiếp nên $\begin{matrix} \widehat{AME} = \widehat{AFE} = \widehat{BMD} \\ \widehat{AMF} = \widehat{AEF} = \widehat{DMC} \end{matrix}$ (Bạn đọc tự nhìn vào hình vẽ)

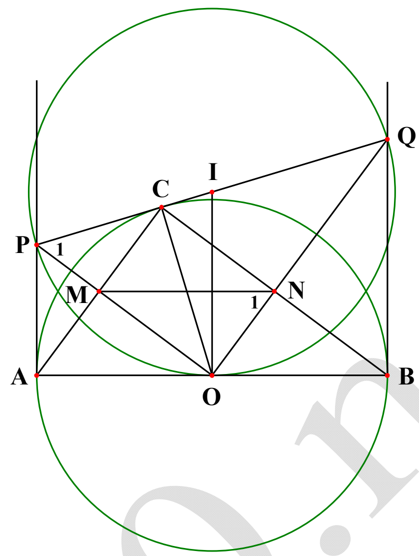
Do đó
$$\begin{aligned} \frac{AC}{ME} + \frac{AB}{MF} &= \tan\widehat{AME} + \tan\widehat{AMF} \\ &= \tan\widehat{BMD} + \tan\widehat{MDC} \\ &= \frac{BD}{MD} + \frac{DC}{MD} = \frac{BD+DC}{MD} = \frac{BC}{MD} \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

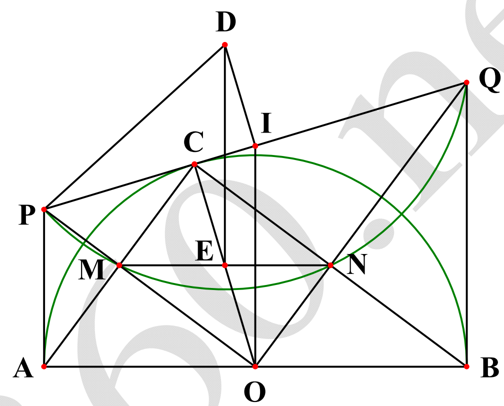
Bài 16: Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O), C không trùng với A, B. Tiếp tuyến tại C của (O; R) cắt tiếp tuyến tại A, B của (O; R) lần lượt tại P, Q. Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC.

a) Chứng minh: Tứ giác CMON là hình chữ nhật và AP. BQ = MN^2.

b) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ.

c) Chứng minh: PMNQ là tứ giác nội tiếp. Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất.

	
a)	Ta có: OA = OC = R và PA = PC (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ OP là đường trung trực của AC$\Rightarrow OP \perp AC \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^0$ Chứng minh tương tự được $\widehat{ONC} = 90^0$ Lại có: $\widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Tứ giác CMON có $\widehat{OMC} = \widehat{ONC} = \widehat{MCN} = 90^0 \Rightarrow$ Tứ giác CMON là h.chữ nhật.
	Vì CMON là hình chữ nhật nên $\widehat{POQ} = 90^0$ Vì PQ là tiếp tuyến tại C của (O) nên $OC \perp PQ$ Δ OPQ vuông tại O, đường cao OC. Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong Δ vuông, ta có: PC.QC = OC^2 Mà PA = PC, QB = QC (tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau) MN = OC (CMON là hình chữ nhật)$\Rightarrow AP.BQ = MN^2$.
b)	Gọi I là trung điểm của PQ Δ OPQ vuông tại O, có OI là đường trung tuyến $\Rightarrow OI = \dfrac{PQ}{2} \Rightarrow O \in \left(I; \dfrac{PQ}{2}\right)$ Vì AP, BQ là các tiếp tuyến của (O) nên $AP \perp AB$, $BQ \perp AB$ $\Rightarrow$ APQB là hình thang vuông

	Mà OI là đường trung bình của hình thang APQB $\Rightarrow OI//AP \Rightarrow OI \perp AB \Rightarrow$ AB là tiếp tuyến tại O của $\left(I;\dfrac{PQ}{2}\right)$.
c)	Δ OCP vuông tại C, đường cao CM. Áp dụng hệ thức về cạnh và đường cao trong Δ vuông, ta có: $OC^2 = OM.OP$ Tương tự ta có: $OC^2 = ON.OQ$ $\Rightarrow OM.OP = ON.OQ \Rightarrow \dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP}$ Δ OMN và Δ OQP có: $\widehat{POQ}$ chung, $\dfrac{OM}{OQ} = \dfrac{ON}{OP}$ $\Rightarrow \Delta OMN \backsim \Delta OQP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{P}_1 \Rightarrow$ PMNQ là tứ giác nội tiếp.
	 Gọi D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ, E là giao điểm của OC và MN. (D) có I là trung điểm của dây PQ và E là trung điểm của dây MN $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow DI \perp PQ, DE \perp MN \\ \Rightarrow DI//OE, DE//OI\end{array}\right. \Rightarrow$ Tứ giác OEDI là hình bình hành $\Rightarrow DI = OE = \dfrac{R}{2}$ Áp dụng định lí Py-ta-go vào Δ vuông DIP, ta có: $DP = \sqrt{DI^2 + IP^2} = \sqrt{\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{PQ}{2}\right)^2} \geq \sqrt{\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{5}}{2}$ Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow PQ = AB \Leftrightarrow OC \perp AB \Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) Vậy khi C là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O) thì đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất bằng $\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.