TÀI LIỆU THAM KHẢO
CHUYÊN ĐỀ ÔN TẬP HÌNH HỌC 9
Phần 2

Bài 22: Cho hai đ/tròn (O); (O’) bán kính lần lượt là R; R’(R> R’) tiếp xúc ngoài tại A và dây cung AB cố định của (O). Một cát di động luôn qua A cắt (O) tại M và cắt (O’) tại N. Đường thẳng qua N song song với AB cắt đường thẳng MB tại Q và cắt (O’) tại điểm thứ hai P

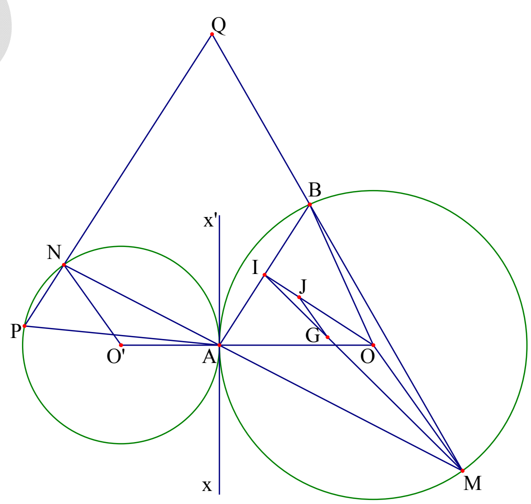
a) C/m: OM // O’N

b) C/m: $\frac{BQ}{BM}=\frac{R'}{R}$

c) T/g ABQP là hình gì? Tại sao?

d) C/m: trọng tâm G của tam tam giác MAB chạy trên đ/tròn cố định

Giải:



a) $\widehat{O'NA}=\widehat{OMA}$ => đpcm

b) AB // NQ => $\frac{BQ}{BM}=\frac{AN}{AM}$

ΔAOM đồng dạng với ΔAO’N =>

$\frac{NA}{AM}=\frac{O'N}{OM}=\frac{R'}{R}$

=>đpcm

c) Kẻ tiếp tuyến chung xAx’ có:

$\widehat{Q}=\widehat{B}=\widehat{\text{MAx}}=\widehat{x'AN}=\widehat{P}$; AB // PQ => hình thang cân

d) Gọi I là trung điểm của AB, kẻ GJ // OM (J thuộc IO). Ta có:

$\frac{JI}{JO}=\frac{1}{2}$ => J cố định

Mặt khác, $\frac{GJ}{OM}=\frac{1}{3}\Rightarrow JG=\frac{R}{3}$

Vậy G chạy trên đ/tròn (J;R/3) cố định

Bài 23: Cho 2 đ/tròn (O_1); (O_2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A và tiếp tuyến chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O_1); (O_2) thứ tự tại B và C và cắt Ax tại M. Kẻ các đường kính BO_1D; CO_2E.

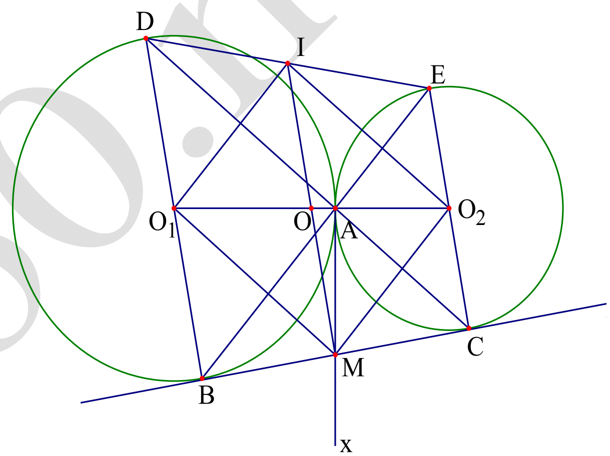
a) C/m: M là trung điểm của BC

b) C/m: ΔO_1MO_2 vuông

c) C/m: A,B,E thẳng hàng; C,A,D thẳng hàng

d) Gọi I là trung điểm của DE. C/m: đ/tròn ngoại tiếp ΔIO_1O_2 tiếp xúc với đường thẳng d.

Giải:



a) MB = MC = MA (t/c 2 t^2 cắt nhau)

b) MO_1; MO_2 là 2 tia p/g của 2 góc kề bù

c) $\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=180^o$ => đpcm

Tương tự, C,A,D thẳng hàng

d) *) C/m T/g IO_1MO_2 là hcn (hbh + 1 góc vuông)

=> $(O_1IO_2) \equiv (O_1IO_2M)$ vì O là tâm

*) C/m: CEDB là hình thang vuông => OM $\perp$ d => đpcm

Bài 24: Cho (O;R). Một dây AB = R$\sqrt{2}$ cố định và điểm M di động chạy trên cung lớn BA sao cho ΔAMB nhọn. H là trực tâm ΔAMB. P,Q lần lượt là các giao điểm thứ hai của các đường thẳng AH,BH với (O). S là giao điểm các đường thẳng PB,QA

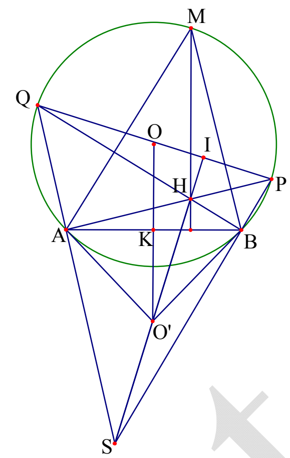
a) C/m: PQ là đường kính của (O)

b) T/g AMBS là hình gì? Vì sao?

c) C/m độ dài SH không đổi

d) Gọi I là giao điểm của SH,QP. C/m I chạy trên 1 đường tròn cố định

Giải:



a) AB = R$\sqrt{2}$ => sđ $\overset{\frown}{AB} = 90^o$

Do AP ⊥ MB;BQ⊥MA => sđ $\overset{\frown}{MP}$

=sđ $\overset{\frown}{MQ} = 90^o$ (Góc có đỉnh ở trong đ/tròn)

=>sđ $\overset{\frown}{PQ} = 90^o + 90^o = 180^o$

b) MA // BS (⊥BQ); MB //AS(⊥AP)

=>T/g AMBS là hbh

c) C/m: tam giác AQH,APS vuông cân

($\hat{Q} = \hat{P} = 45^o$)

=> QA = AH;AP = AS

=> ΔQAP = ΔHAS (cgc) => SH = PQ = 2R

không đổi

d) cách 1: Gọi O' là tâm đ/tròn ngoại tiếp tứ giác AHBS ($\widehat{HAS} = \widehat{HBS} = 90^o$)

O' là trung điểm HS => O'A = O'B = SH/2 = R(= BC/2)

Mà OA = OB = R=> OAO'B là hthoi

Gọi K là trung điểm của AB => O,K,O' thẳng hàng.

Do O,K cố định nên O' cố định (OK = KO')

Do $\widehat{OIO'} = 90^o$ => I thuộc đường tròn đường kính OO' cố định

Cách 2: C/m: AQIH, BPIH nội tiếp

=> $\widehat{HIA} = \widehat{HQA} = 45^o; \widehat{HIB} = \widehat{HPB} = 45^o \Rightarrow \widehat{AIB} = 45^o + 45^o = 90^o$

=> I thuộc đ/tròn đường kínhAB cố định

Bài 25: Cho một nửa đ/tròn tâm O đ/kính AB. Một điểm M nằm trên cung AB. Gọi H là điểm chính giữa của cung AM. Tia BH cắt AM tại 1 điểm I và cắt tiếp tuyến tại A của (O) tại điểm K. Các tia AH, BM cắt nhau tại 1 điểm S

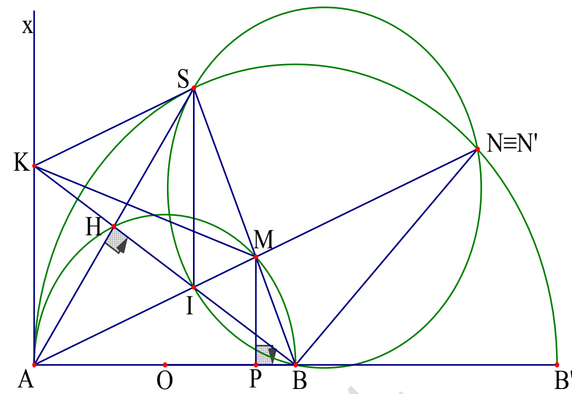
a) C/m: ΔBSA cân, suy ra S nằm trên 1 đ/tròn cố định

b) C/m: KS là tiếp tuyến của (B;BA)

c) Đ/tròn ngoại tiếp ΔBIS cắt (B;BA) tại N. C/m: 3 điểm A,M,N thẳng hàng.

d) Xác định vị trí của M sao cho $\widehat{MKA} = 90^o$

Giải:



a) ΔABS cân tại B vì BH vừa là đường cao, vừa là p/g

=> S thuộc đ/tròn (B;BA)

b) ΔBAK = ΔBSK (cgc) => $\widehat{BSK} = \widehat{BAK} = 90^o$

=> KS là tiếp tuyến tại S của (B;BA)

c) Gọi N' là giao điểm của AM và (B;BA)

=> ΔBAN' cân => $\widehat{BAN'} = \widehat{BN'A}$

Do I là trực tâm ΔASB =>

$\widehat{BAN'} = \widehat{ISB} \Rightarrow \widehat{ISB} = \widehat{IN'B} \Rightarrow S; N' \in$ 1 đ/tròn

=>T/g ISN'B nội tiếp => N' thuộc (ISB).

Theo cách dựng N' thuộc (B;BA)

Vậy N' là giao điểm của (ISB) và (B;BA)

Vậy N ≡ N' => A,M,N thẳng hàng

d) $\widehat{MKA} = 90^o$ ⇔ NK // AB => $\widehat{MKB} = \widehat{KBA}$ (So le trong)

=> ΔMKB cân tại M. Hạ MP ⊥ AB => MPAK là hcn=> KM = AP

Đặt AB = 2R, MB = x => MB^2 = AB.PB = AB(AB - AP)

Hay $x^2 = 2R(R - x)$ => $x = R(\sqrt{5} - 1)$ = MB

Vậy M thuộc cung AB sao cho MB = = $R(\sqrt{5} - 1)$ thì $\widehat{MKA} = 90^o$

Bài 26: Cho (O;R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và trên đó lấy điểm P sao cho AP > R. Kẻ tiếp tuyến PM (M là tiếp điểm)

a) C/m: BM // OP

b) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BM tại N. T/g OBNP là hình gì? Tại sao?

c) Gọi K là giao điểm của AN với OP, I là giao điểm của ON với PM, J là giao điểm của PN với OM. C/m: 3 điểm K,I,J thẳng hàng.

d) Xác định vị trí của P sao cho K nằm trên (O)

Giải:

a) BM // OP ($\perp$ AM)

b) ΔPAO = ΔNOB => OBNP là hbh

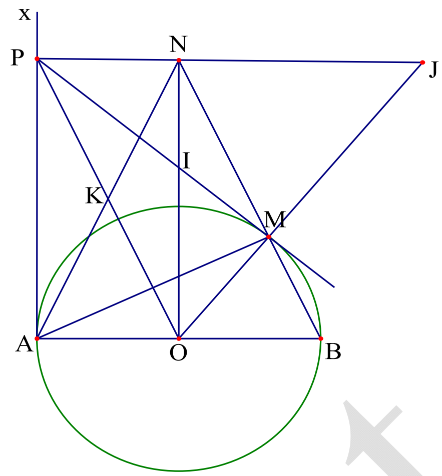
c) I là trực tâm ΔOPJ và ΔIPO cân tại I

=>JI là trung trực của PO => K,O,P thẳng hàng

d) T/g OANP là hcn => ΔKAO cân tại K

Điểm K thuộc đ/tròn ⇔ OK = R ⇔ ΔOAK đều ⇔ $\widehat{AOP} = 60^o \Rightarrow \widehat{OPA} = 30^o \Rightarrow OP = 2R$

=>AP = $R\sqrt{3}$



Bài 27: Cho đ/tròn (O;R). Trên đó có 1 điểm A cố định . Kẻ tia Ax tiếp xúc với (O) tại A. Lấy M thuộc Ax. Kẻ tiếp tuyến MB với đ/ tròn (O). Gọi I là trung điểm của MA và K là giao điểm thứ hai của BI với đ/tròn (O). Tia MK cắt (O) tại điểm thứ hai C

a) C/m: ΔMIK đồng dạng với ΔBIM

b) C/m: BC //MA

c) Xác định vị trí của M để T/g AMBC là hình thoi

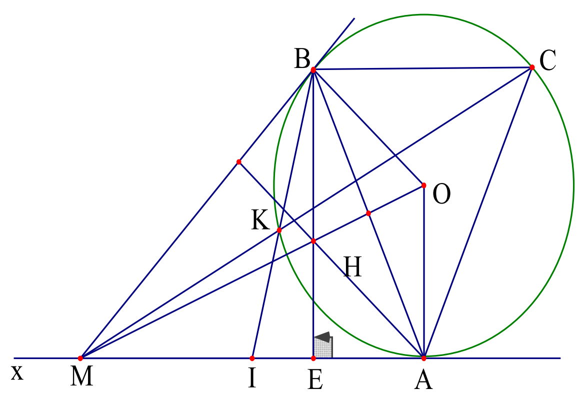
d) Gọi H kà trực tâm ΔMAB.C/m: Khi M di động trên tia Ax thì H chạy trên 1 đ/tròn cố định

Giải:

a) C/m: IA^2 = IK.IB => IM^2 = IK.IB => $\frac{IM}{IB} = \frac{IK}{IM}$ mà góc I chung => đpcm

b) Từ a) ta có $\widehat{IMK} = \widehat{KBM}$ mà $\widehat{KBM} = \widehat{BCM}$ (= $\frac{1}{2}$ sđ $\widehat{KB}$) => $\widehat{BCM} = \widehat{IMC}$ => BC // MA

c) AMBC có BC // MA nên AMBC là hình thoi ⇔ MB // AC Vì MC ≡ MO nên K thuộc MO (K là chính giữa cung AB)



Khi đó, $\left.\begin{array}{l} \widehat{KMI} = \frac{1}{2}\widehat{AMB} \\ \widehat{KBM} = \widehat{KBA} = \frac{1}{2}\widehat{MBA} \\ \widehat{KMI} = \widehat{KBM}\,(theob) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{ABM}$

=> Δ MAB cân tại A. Mặt khác, ΔMAB cân tại M => ΔMAB đều

=> ΔABC đều => AM = AB = $R\sqrt{3}$

Vậy M thuộc Ax sao cho AM = $R\sqrt{3}$ thì AMBC là hình thoi

d) Gọi H là giao điểm MO với BE => AOBH là hình thoi => HA = R

Vì A cố định => H thuộc (A;R)

Giới hạn: H thuộc nửa mp bờ OA chứa M

Bài 28: Cho ΔABC có các góc B,C nhọn. Các đường tròn đường kính AB,AC cắt nhau tại điểm thứ hai H. Một đường thẳng d qua A lần lượt cắt 2 đường tròn nói trên tại M,N sao cho A nằm giữa M và N

a) H thuộc BC

b) T/g BCNM là hình gì?Tại sao?

c) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của BC,MN. C/m: 4 điểm A,H, P,Q cùng thuộc 1 đ/tròn

d) Xác định vị trí của d để MN có độ dài lớn nhất

Giải:

a) $\widehat{AHB} + \widehat{AHC} = 180^o$

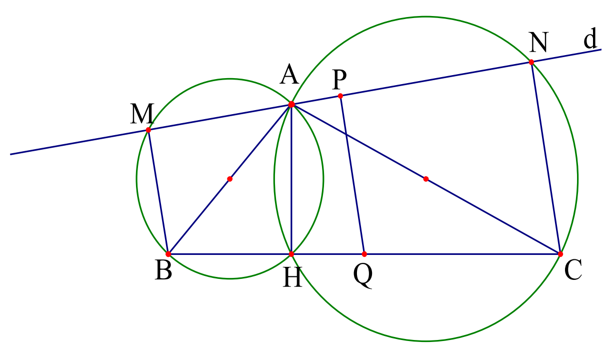
b) Hình thang vuông

c) PQ $\perp$ MN => $\widehat{APQ} = 90^o$, $\widehat{AHQ} = 90^o$ => đpcm

d) MN $\leq$ BC. Vậy MN max ⇔ MN = BC.

Khi đó BCNM là hình chữ nhật và MN //BC

vậy d // BC thì MN max



Bài 29: Cho (O) và 1 dây AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và C là điểm bất kì nằm giữa A và B. Tia MC cắt (O) tại D

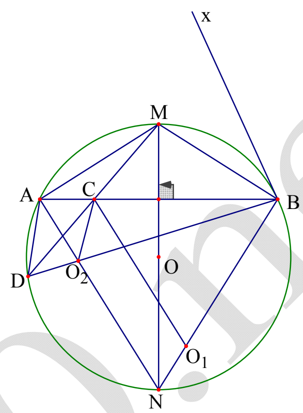
a) C/m: $MA^2 = MC.MD$

b) C/m: MB.BD = MD.BC

c) C/m: Đ/tròn ngoại tiếp tam giác BCD tiếp xúc với MB tại B

d) Chứng minh khi C di động trên AB thì các đ/tròn (O_1); (O_2) ngoại tiếp tam giác BCD, ACD có tổng bán kính không đổi

Giải:



a) ΔMAC đồng dạng với ΔMDA => đpcm

b) ΔMBC đồng dạng với ΔMDB

c) kẻ tiếp tuyến Bx với (BCD) =>

$\widehat{CBx} = \widehat{CDB} = \frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{BC}$ => Bx ≡ BM

d) Vẽ đường kính MN, nối NA, NB

Do BM là tiếp tuyến của (BCD) mà NB ⊥ Bx nên $O_1 \in$ NB

Mặt khác, O_1 nằm trên trung trực của BC

Vậy O_1 là giao của NB với đường trung trực của BC

=>ΔO_1BC cân tại O_1 (1)

Tương tự, AM là tiếp tuyến của (ADC) => NA ⊥ AM => $O_2 \in$NA

Vậy O_2 là giao điểm của đường trung trực đoạn AC

*Với NA => ΔO_2AC cân tại O_2 (2)

Mặt khác, ΔNAB cân tại N (3)

Từ (1)(2)(3) => $\widehat{ANB} = \widehat{AO_2C} = \widehat{CO_1B}$ => O_2C // O_1N và O_1C // O_2N

=>$O_2C = O_1N$

Khi đó, $O_2C + O_1B = O_1N + O_1B$ = NB không đổi

Bài 30: Cho ΔABC (AB = AC) nội tiếp (O). Một điểm M bất kì trên cung nhỏ AC. Tia Bx vuông góc với AM cắt tia CM tại D.

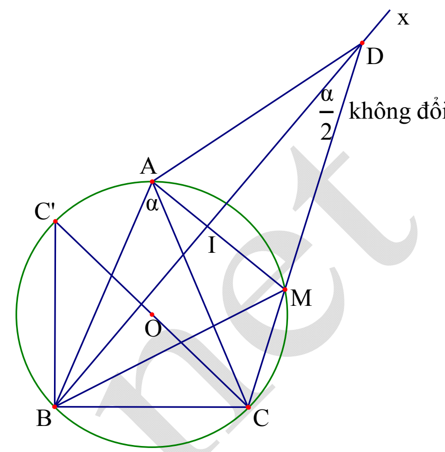
a) C/m: $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$

b) C/m: ΔBMD cân

c) C/m: M di động thì D chạy trên 1 đ/tròn cố định và độ lớn góc BDC không đổi

d) Xác định vị trí của M để tứ giác ABMD là hình thoi. Tính AM ở vị trí đó biết $\widehat{BAC} = \alpha$ và bán kính (O) là R

Giải:



a) $\widehat{AMD} = \widehat{ABC}$ (vì cùng bù $\widehat{AMC}$)

b) Tia MA là p/g vừa là đường cao => đpcm

c) AM là trung trực BD => AD = AB không đổi , A cố định

=> D thuộc (A;AB) không đổi

d) Do IB = ID nên ABMD là hình thoi ⇔ IA = IM

⇔ AM vuông góc với đường kính đi qua B của (O)

Khi đó, T/g AMCB là hình thang cân (tam giác BAM cân => BM = AB = AC)

⇔ AM = BC

Kẻ đường kính CC' => tam giác BCC' vuông tại B có: $\widehat{BC'C} = \widehat{BAC} = \alpha$

=>BC = AM = CC'.sin C = 2R.sinC

Bài 31: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A,B. Các đường thẳng AO,AO' cắt (O) lần lượt tại các điểm thứ hai C, D và cắt đ/tròn (O') lần lượt tại các điểm thứ hai E,F

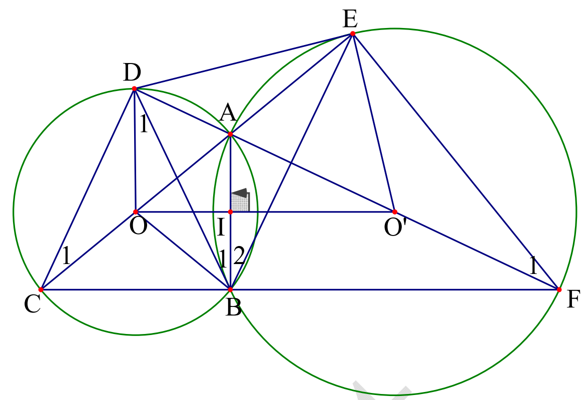
a) C/m: B,F,C thẳng hàng

b) C/m: T/g CDEF nội tiếp

c) C/m: A là tâm đ/tròn nội tiếp tam giác BDE

d) Tìm điều kiện để DE là tiếp tuyến chung của các đ/tròn (O) và (O')

Giải:



a) $\widehat{ABC}+\widehat{ABF}=90^o+90^o=180^o$

b) $\widehat{CDF}=\widehat{CEF}=90^o$

c) T/g AEFB nội tiếp => $\widehat{B_2}=\widehat{F_1}$

T/g BADC nội tiếp => $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$

T/g CDEF nội tiếp => $\widehat{C_1}=\widehat{F_1}$

Suy ra, $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ => BA là p/g

Tương tự, DA là p/g . từ đó, A là tâm….

d) Nếu DE là tiếp tuyến (O) => $\widehat{ADE}=\widehat{B_1}$ .Tương tự, $\widehat{AED}=\widehat{B_2}$

Vì $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}\Rightarrow\widehat{ADE}=\widehat{AED}\Rightarrow 2\widehat{ADE}=2\widehat{AED}\Rightarrow\widehat{BDE}=\widehat{BED}$

=>Tam giác BDE cân tại B => DE $\perp$ BA mà OO’$\perp$AB (trung trực) => DE // OO’

Ta có: OD// O’E ($\perp$DE) => OO’ED là hcn => OD = 2IA = O’E

Mà AB = 2IA => OD = O’E = AB

KL: DE là tiếp tuyến chung ⇔ OD = O’E = AB

Bài 32: Xét đoạn thẳng AD = a với trung điểm I. Một tia Ix vuông góc với AD. Một đ/tròn bất kì bán kính R (R > a/2) tiếp xúc với AD tại A cắt tia Ix tại B và C (B nằm giữa I,C)

a) C/m: ΔABI đồng dạng với ΔCIA. Từ đó, suy ra tích IB.IC không đổi

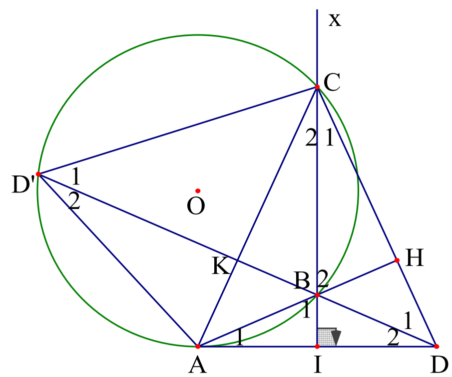
b) C/m: B là trực tâm ΔADC

c) Gọi D’ là điểm đối xứng của D qua đường thẳng AC. C/m: D’ cũng thuộc đ/tròn

d) Nêu cách dựng ΔABC biết $\cos\widehat{CAI}=\frac{1}{3}$

e) Xét trường hợp $\cos\widehat{CAI}=\frac{1}{2}$. C/m: T/g ADCD’ là hình thoi.

Giải:



a) $\widehat{IAB} = \widehat{ICA}$ => đpcm

=> IB.IC = IA^2 không đổi

b) AB cắt CD tại H

ΔBAI và ΔBCH có:

$\widehat{B_1} = \widehat{B_2}; \widehat{A_1} = \widehat{C_1}\left(= \widehat{C_2}\right) \Rightarrow \widehat{H} = \hat{I} = 90^o$ => đpcm

c) Do t/c đối xứng =>

$\widehat{D'_1} = \widehat{D_1}; \widehat{D'_2} = \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{AD'C} = \widehat{ADC}$

Mà $\widehat{ADC} + \widehat{IBH} = \widehat{ADC} + \widehat{ABC} = 180^o$

=> $\widehat{AD'C} + \widehat{ABC} = 180^o \Rightarrow D' \in (O)$

d) $\cos\widehat{CAI} = \frac{1}{3}$=> $\frac{AI}{AC} = \frac{1}{3}$ => AC =3AI

=> Dựng tam giác vuông AIC tại I có cạnh huyền AC = 3AI. Hạ DK vuông góc AC cắt IC tại B ta có tam giác ABC

e) Nếu $\cos\widehat{CAI} = \frac{1}{2}$ => AC = 2AI = AD

=> tam giác ADC đều => AD = DC = CD’ = AD’ => đpcm.

Bài 33: Cho ΔABC (AB < AC; $\widehat{BAC} > 90^o$), I,K theo thứ tự là trung điểm của AB,AC. Các đ/tròn đường kính AB,AC cắt nhau tại điểm thứ hai D. Tia BA cắt đ/tròn (K) tại điểm thứ hai E. Tia CA cắt (I) tại điểm thứ hai F

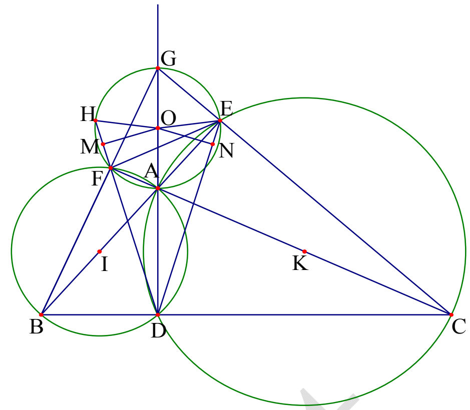
a) 3 điểm B,C,D thẳng hàng

b) C/m: T/g BFEC nội tiếp

c) C/m: 3 đường thẳng AD,BF,CE đồng quy

d) Gọi H là giao điểm thứ hai của DF với đ/tròn ngoại tiếp tam giác AEF. So sánh độ dài các đoạn thẳng DH,DE.

Giải:



a) b) : xem bài 31

c) AD$\perp$ BC (1)

A là trực tâm Δ GBC => GA $\perp$ BC (2)

Từ (1)(2) => đpcm

d) Đ/tròn ngoại tiếp (AEF) ≡ đường kính AG

Hạ OM $\perp$DH, ON $\perp$DE => ΔDOM = ΔODN (DO là p/g góc HDE)

=>DM = DN (1)

=> ΔOHF = ΔONE (OH = OE, OM = ON)

=> HF = NE (2)

Từ (1)(2) => đpcm

Bài 34: Từ điểm S nằm ngoài (O), kẻ tiếp tuyến SA với (O) và 1 cát tuyến SBC sao cho $\widehat{BAC} < 90^o$. Tia p/g $\widehat{BAC}$ cắt dây BC tại D và cắt đ/tròn (O) tại điểm thứ hai E. Các tiếp tuyến của (O) tại C,E cắt nhau tại N. Gọi Q và P thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng AB và CE, AE và CN. CMR:

a) SA = SD

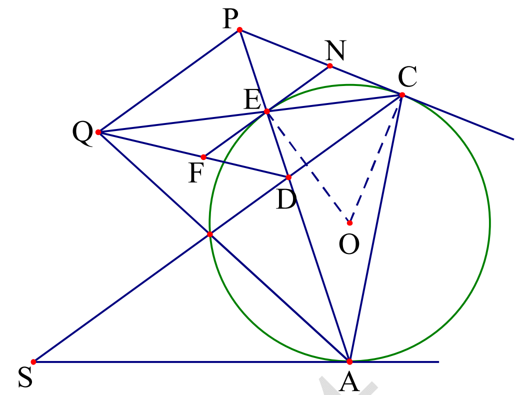
b) EN //BC

c) C/m: Δ QCB đồng dạng với ΔPCE

d) $\frac{1}{CN} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{CP}$

e) Gọi F là giao điểm của NE và DQ. CMR: $\frac{2}{FN} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{PQ}$

Giải:



a) $\widehat{SAD} = \widehat{SDA}$ => đpcm

b) $\widehat{NEC} = \widehat{ECB}\left(\overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{EC}\right)$=> đpcm

c) $\widehat{CQB} = \widehat{CPE}$ (đỉnh ngoài đ/tròn);

$\widehat{PCE} = \widehat{QCB}\left(\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{EB}\right)$

=> ΔPCE đồng dạng với ΔQCB (gg)

d) EN //BC => $\frac{EN}{CD} = \frac{NP}{PC} = \frac{PC - NC}{PC} = 1 - \frac{NC}{PC}$

Do NE = NC => $\frac{NC}{CD} = 1 - \frac{NC}{PC}$ (chia NC)

$\frac{1}{CD} = \frac{1}{NC} - \frac{1}{PC}$ hay $\frac{1}{CN} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{CP}$ (1)

Cách 2: Nhân hai vế của (1) với CN sau đó áp dụng hệ quả Ta – lét.

Bài 35: Cho (O) đường kính AB = 2R. Gọi E là điểm trên (O) sao cho AE > EB. M là một điểm trên đoạn AE sao cho AM.AE = AO.AB

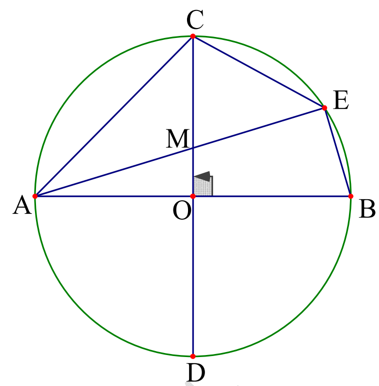
a) C/m: ΔAOM vuông tại O

b) OM cắt (O) ở C và D. Điểm C và E ở cùng một phía đối với AB. C/m: ΔACM đồng dạng với ΔAEC

c) C/m: AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ΔCEM

d) Giả sử tỉ số diện tích hai tam giác ACM và AEC là $\frac{2}{3}$. Tính AC, AE, AM, CM theo R

Giải:



a) gt => $\frac{MA}{AB}=\frac{AO}{AE}$ => ΔAMO đồng dạng với ΔABE

mà $\widehat{AEB}=90^o \Rightarrow \widehat{AOM}=90^o$

b) Có góc A chung, $\widehat{ACM}=\widehat{AEC}\left(\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}\right)$

=>ΔACM đồng dạng với ΔAEC (g - g)

c) $\widehat{ACM}=\widehat{AEC}$=> AC là tiếp tuyến của tại C của (MEC)

d) $\frac{S_{ACM}}{S_{AEC}}=\left(\frac{AC}{AE}\right)^2=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{AC}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\Rightarrow AE=AC.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Mà AC = R$\sqrt{2}$

=> $AE=R\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=R\sqrt{3}$

+) ΔACM đồng dạng với ΔAEC

=> $\frac{AM}{AC}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow AC^2=AM.AE\Rightarrow AM=\frac{AC^2}{AE}=\frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{R\sqrt{3}}=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$

+) Δ vuông AOM có:

$\cos A=\frac{AO}{AM}=\frac{R}{2R\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\hat{A}=30^o\Rightarrow OM=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{2}.2R.\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{R\sqrt{3}}{3}$

Vậy CM = R - $\frac{R\sqrt{3}}{3}=\frac{R}{3}\left(3-\sqrt{3}\right)$

Bài 36: Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB= 2R. Vẽ dây AC = R và BD = R$\sqrt{2}$

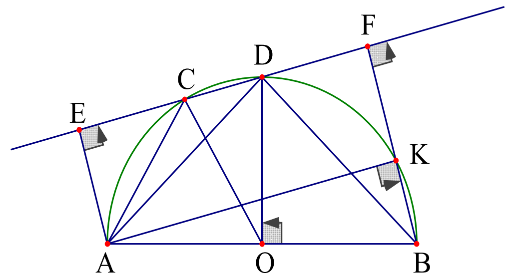
a) C/m: $\widehat{AOC}=60^o;\widehat{BOD}=90^o$

b) Từ A và B hạ AE $\perp$ CD; BF$\perp$ CD. C/m: CE = DF

c) Tính EF theo R

d) C/m: $S_{ABFE}=S_{ACB}+S_{ADB}$

Giải:



a) +) ΔAOC đều => $\widehat{AOC} = 60^o$

+) DB^2 = 2R^2 ; OD^2 + OB^2 = 2R^2 =>

$\widehat{BOD} = 90^o$

b) sđ $\widehat{BCD} = \frac{1}{2}$ sđ $\widehat{BD}$ =45^o;

$\widehat{ACB} = 1v \Rightarrow \widehat{ACE} = 45^o$

=> ΔAEC vuông cân => AE = EC = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

Trong ΔDFB có $\widehat{D} = 60^o \Rightarrow DF = \frac{1}{2}BD = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Vậy CE = DF

c) Hạ AK $\perp$ BF tại K => AEFK là hcn => FK = AE = $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

$$BF = \sqrt{\left(R\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BK^2 = \left(BF - KF\right)^2 = \frac{R^2}{2}\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$$

ΔAKB vuông có: EF = AK = $\sqrt{AB^2 - BK^2} = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) Ta có $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Do đó, AK = $\frac{R\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2}$

$$S_{ABFE} = \frac{BF + AE}{2}.AK = \frac{R\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}.\frac{R\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{2} = \frac{R^2}{8}\left(8+4\sqrt{3}\right) = R^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (1)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.CB = \frac{R}{2}.R\sqrt{3} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2};\ S_{ABD} = \frac{1}{2}AB.OD = R^2$$

=> $S_{ABC} + S_{ABD} = R^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (2)

Từ (1)(2) => $S_{ABFE} = S_{ABC} + S_{ABD}$

Bài 37: Cho đường tròn (O_1; 1cm) và (O_2; 3cm) tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung BC

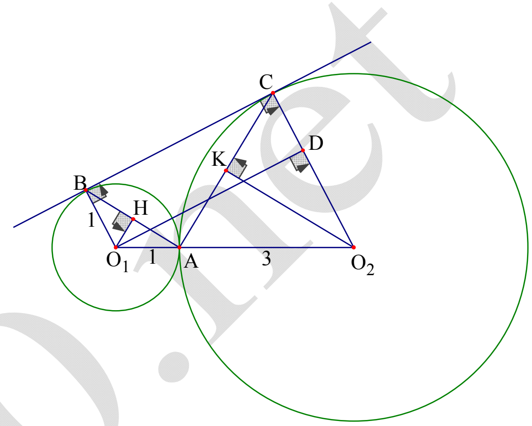
a) Tính diện tích tứ giác BCO_2O_1

b) Tính diện tích các hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ AB của đường tròn (O_1) và cung nhỏ AC của (O_2)

c) Tính diện tích phần mặt phẳng giới hạn bởi tiếp tuyến BC và miền ngoài của 2 đường tròn (O_1); (O_2)

d) Tính tỉ số diện tích của 2 tứ giác O_1KHO_2 và O_1BCO_2 (K;H theo thứ tự là trung điểm của AB; AC)

Giải:



a) Hạ $O_1D \perp O_2C$ => BC = O_1D =

$\sqrt{O_1O_2^{\,2} - O_2D^2}$

O_2D = 3 -1 = 2 cm; O_1O_2 = 4 cm

=>BC = $\sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$ cm

$$S_{BCO_2O_1} = \frac{(O_1B + O_2C).BC}{2} = \frac{(1+3).2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

b) Vì

$$\frac{O_2D}{O_1O_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{O_2O_1D} = 30^o \Rightarrow \widehat{AO_2C} = 60^o; \widehat{AO_1B} =$$

Gọi S_1 là diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AC

=>S_1 = $S_{\text{quạt } 60^o}$ - S_{O_2AC}

$$S_{O_2AC} = \frac{\pi.3}{360^o}.60^o = \frac{\pi}{2}$$

ΔO_2AC đều => AC = R => $O_2H = \sqrt{O_2C^2 - HC^2} = \sqrt{3^2 - 1,5^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$=> S_{O_2AC} = \frac{1}{2}O_2H.AC = \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$=> S_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4}$. Tương tự, $S_{vp\,\widehat{AB}} = S_{quatAO_1B} - S_{\Delta AO_1B} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ (cm^2)

c) Gọi S là diện tích cần tìm

$$=> S = S_{BCO_2O_1} - S_{quatAO_1B} - S_{quatAO_2C} = 4\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6} \quad (cm^2)$$