

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

1. Hàm số liên tục tại 1 điểm:

Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm x_0 gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

Định nghĩa: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$. Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

Nhận xét:

- Nếu hai hàm số f và g liên tục tại điểm x_0 thì các hàm số $f \pm g, fg, cf$ (c là một hằng số) đều liên tục tại điểm x_0 .
- Hàm đa thức và hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

3. Tính chất của hàm số liên tục:

Định lý 2 (định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a), f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$.

Ý nghĩa hình học của định lý

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a), f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

Hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ý nghĩa hình học của hệ quả

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a; b)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

PHƯƠNG PHÁP 1:

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 .

PHƯƠNG PHÁP 2:

Bước 1: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Bước 2: Tìm $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 .

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -2$

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$$

LỜI GIẢI

a). Vì $f(-2)$ không xác định, suy ra hàm số không liên tục tại $x = -2$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x-2) = -4 = f(-2)$

Do đó hàm số liên tục tại $x = -2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 - 4} & x \neq \pm 2 \\ -\frac{1}{6} & x = 2 \end{cases}$

a). Tính $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

b). Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x = 2; x = -2$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - x^2 - 5}{(x^2 - 4)(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} = -\frac{1}{6}$.

b). Từ câu a) suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

hàm số đã cho không xác định tại $x = -2$, do đó hàm số không liên tục tại $x = -2$.

Ví dụ 3 : Xét tính liên tục tại giá trị x_0 của các hàm số sau:

1). $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ và tại $x_0 = 4$

2). $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} & x \neq 1 \\ \frac{1}{4} & x = 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$

3). $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & x = 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$ và tại $x = \frac{\pi}{3}$

4). $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - 7x + 5x^2 - x^3}{x^2 - 3x + 2} & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ tại $x_0 = 2$ và tại $x_0 = 5$

$$5). f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 5, \text{ tại } x_0 = 6 \text{ và tại } x_0 = 4$$

$$6). f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & x > -1 \\ \frac{\sqrt{3-x}}{2} & x \leq -1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = -1$$

$$7). f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x > 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ x - \frac{3}{2} & x < 1 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 1$$

LỜI GIẢI

1).

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$:

$$\text{Có } f(x_0) = f(2) = 1$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 4$:

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 2}{4 - 2} = 3 = f(4) \Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 4.$$

2). Có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{4}$ (1)

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3-4}{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(\sqrt{x+3}+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Vậy hàm số liên tục tại $x = 1$.

3).

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 0$

$$\text{Có } f(x_0) = f(0) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2 (1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \frac{1}{1 + \sqrt{\cos x}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 0$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = \frac{\pi}{3}$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{\cos \frac{\pi}{3}}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ suy ra hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

4). • Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$

$$\text{Ta có } f(x) = f(2) = 1$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - 7x + 5x^2 - x^3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-2)(-x^2 + 3x - 1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + 3x - 1}{x-1} = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \frac{2 - 7 \cdot 5 + 5 \cdot 5^2 - 5^3}{5^2 - 3 \cdot 5 + 2} = f(5) \Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 5.$$

$$5). f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2 + 3 & x \leq 5 \end{cases} \quad \text{tại } x_0 = 5, \text{ tại } x_0 = 6 \text{ và tại } x_0 = 4$$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

Áp dụng nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại x_0 .

$$\begin{aligned} \text{Có } \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{(\sqrt{2x-1}+3)}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 5 - 1} + 3}{2} = 3. \end{aligned}$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} [(x-5)^2 + 3] = 0 + 3 = 3 = f(5).$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 5$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 6$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \frac{6-5}{\sqrt{2 \cdot 6 - 1} - 3} = \frac{1}{\sqrt{11} - 3} = f(6). \text{ Vậy hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 6.$$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 4$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} [(x-5)^2 + 3] = (4-5)^2 + 3 = 4 = f(4) \Rightarrow \text{hàm số } f(x) \text{ liên tục tại } x_0 = 4.$$

$$\begin{aligned} 6). \text{ Có } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+3-1}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2(x+1)}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+1} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} + 1} = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{3-x}}{2} = \frac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1.$$

$$\text{Có } f(-1) = \frac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1$$

Vì $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

7). Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2}$

Có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$.

Có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - \frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vì $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x_0 = 1$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 2$?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$.

Hàm liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $a = 1$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

LỜI GIẢI

Ta có :

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(2x-3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)(2x-3)}{x-2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} (3 - 2x) = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x} \right) = a - \frac{1}{4} = f(2).$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Ví dụ 6: Cho các hàm số $f(x)$ sau đây. Có thể định nghĩa $f(0)$ để hàm số $f(x)$ trở thành liên tục tại $x=0$ được không?

a) $f(x) = \frac{7x^2 - 5x}{12x}$ với $x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x \neq 0$

c) $f(x) = \frac{3}{2x}$ với $x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}}{3x}$ với $x \neq 0$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(7x-5)}{12x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x-5}{12} = -\frac{5}{12}$.

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0) = -\frac{5}{12}$ thì hàm số trở thành liên tục tại $x=0$.

b). Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} = \lim_{x \rightarrow 0} 3(\sqrt{x+4}+2) = 12$.

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0) = 12$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x=0$.

c). Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{2x} = +\infty$.

hàm số không có giới hạn tại $x=0$, do đó hàm không thể liên tục tại $x=0$.

d). Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2-2+x}{3x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x})} = \frac{2}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$.