GIỚI HẠN MỘT BÊN

A: KIẾN THỨC CẦN NHỚ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

1.Giới hạn hữu hạn

a. Định nghĩa 1

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0\in R)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0)nếu với mọi dãy số bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^+$.

b. Định nghĩa 2

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0\in R)$. Ta nói rằng hàm số có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy bất kì (x_n) những số thuộc khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n=x_0$, ta đều có $\lim f(x_n)=L$. Khi đó ta viết

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0^-$.

Chú ý:

1). Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ thì hàm số f có giới hạn bên phải và giới hạn bên trái tại điểm x_0 . Và $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

2). Ngược lại, nếu $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$ thì hàm số f có giới hạn tại điểm x_0 và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$.

3). Các định lí 1 và 2 ở bài trước vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^-$ hoặc $x\to x_0^+$.

2. Giới hạn vô cực

1.Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$ được phát biểu tương tự như định nghĩa 1 và định nghĩa 2.

2. Các chú ý 1 và 2 vẫn đúng nếu thay L bởi $+\infty$ hoặc $-\infty$.

B. MỘT SỐ VÍ DỤ

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}$ b). $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

LỜI GIẢI

a). Vì $x\to 3^+ \Rightarrow x>3 \Leftrightarrow x-3>0$. Vậy $|x-3|=x-3$

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{5x-15}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-3}{5(x-3)}=\dfrac{1}{5}$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=-1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x^3-2x & x\ge 1\\ x^3-3x & x<1\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x);\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ không? Vì sao?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-3x\right)=1-3=-2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(2x^3-2x\right)=2-2=0$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\ne\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ nên hàm số đã cho không có giới hạn tại $x=1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1 : Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}$ c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{4-4x^3}{3x^2+5x}}$

LỜI GIẢI

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{-1}{1}=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x^3+x^2}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{(x+1)(x+3)}{\sqrt{x^2(x+1)}}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}(x+3)}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{0}{1}=0.$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{\dfrac{4-4x^3}{3x^2+5x}}=\sqrt{\dfrac{0}{8}}=0.$

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x^4-6x^2-x & x\ge 1\\ x^3-3x & x<1\end{cases}$

Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x);\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$. Hàm số có giới hạn tại $x=1$ không? Vì sao?

LỜI GIẢI

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3-3x\right)=1-3=-2$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(5x^4-6x^2-x\right)=5-6-1=-2$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=-2$ nên hàm có giới hạn tại $x=1$ và $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-2.$

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & x\ne 1\\ \dfrac{1}{8} & x=1\end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ và $f(1)$

b). Tìm $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$. So sánh $\lim\limits_{x\to(-3)^+}f(x)$ và $f(-3)$.

LỜI GIẢI

a)Ta có $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{4-x-3}{(x-1)(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{(x+1)\left(2+\sqrt{x+3}\right)}=-\frac{1}{8}.$$

Và $f(1)=\frac{1}{8}$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1} f(x) < f(1)$.

b) Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-3)^+} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} = \frac{2-0}{9-1} = \frac{1}{4}$ và có $f(-3) = \frac{2-0}{9-1} = \frac{1}{4}$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x) = f(-3)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x^2-3 & |x|<2 \\ 5 & |x|=2 \\ 3x-1 & |x|>2 \end{cases}$

a). Tìm $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)$.

b). Hàm số có giới hạn tại $x=2$ không? Tại sao?

LỜI GIẢI

a). Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^-} (3x-1) = -7$ và có $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to(-2)^+} (2x^2-3) = 5$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-1) = 5$, và có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (2x^2-3) = 5$.

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 5$ nên hàm số có giới hạn tại $x=2$ và $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$.

Câu 5 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x} & x\ge 0 \\ ax+b-1 & -2<x<0 \\ \frac{x^2-4}{x+2} & x\le -2 \end{cases}$

Tìm a, b để hàm số cùng có giới hạn tại $x=-2$ và $x=0$.

LỜI GIẢI

Tại $x=0$ ta có

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax+b-1) = b-1$.