ĐẠO HÀM CẤP CAO

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'(n\in N, n>1)$.

2.Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s=f(t) tại thời điểm t.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số.

1.PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)}=\left(y^{(n-1)}\right)'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y=x\sin 2x,(y''')$ b). $y=\cos^2 x,(y''')$ c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1,\left(y^{(n)}\right)$

d). $y=x^4-\sin 2x,\left(y^{(4)}\right)$ e). $y=\sin^2 2x,\left(y^{(5)}\right)$ f). $y=\dfrac{3x-1}{x+2},\left(y^{(4)}\right)$

LỜI GIẢI

a). Có $y'=x'\sin 2x+x.(\sin 2x)'=\sin 2x+2x\cos 2x$

$\Rightarrow y''=(\sin 2x)'+(2x)'\cos 2x+2x(\cos 2x)'=4\cos 2x-4x\sin 2x$

$\Rightarrow y'''=4(\cos 2x)'-(4x)'\sin 2x-4x(\sin 2x)'=-8\sin 2x-4\sin 2x-8\cos 2x$

$=-12\sin 2x-8\cos 2x$.

b). Ta có $y=\cos^2 x=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\Rightarrow y'=-\sin 2x$

$\Rightarrow y''=-2\cos 2x\Rightarrow y'''=4\sin 2x$

c). $y=x^4+4x^3-3x^2+1$

$\Rightarrow y'=4x^3+12x^2-6x\Rightarrow y''=12x^2+24x-6\Rightarrow y'''=24x+24$

$\Rightarrow y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(5)} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow y^{(n)} = 0$.

d). $y = x^4 - \sin 2x$

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 2\cos 2x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 4\sin 2x$

$\Rightarrow y''' = 24x + 8\cos 2x \Rightarrow y^{(4)} = 24 - 16\sin 2x$

e). $y = \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$

$\Rightarrow y' = 2\sin 4x \Rightarrow y'' = 8\cos 4x \Rightarrow y''' = -32\sin 4x$

$\Rightarrow y^{(4)} = -128\cos 4x \Rightarrow y^{(5)} = 512\sin 4x$

f). $y = \frac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-7\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{14\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6} = \frac{42}{(x+2)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-42\left[(x+2)^4\right]'}{(x+2)^8} = \frac{-168}{(x+2)^5}$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tính y', y'', y'''. Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.

Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.

Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x \left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in N^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

$*\ n=1:(1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n=k\ge 1$ nghĩa là ta có: $y^k=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$$y^{(k+1)}=\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)\quad (2)$$

Thật vậy : vế trái $(2)=y^{k+1}=\left[y^k\right]'=\left[\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)=$=vế phải (2)

$\Rightarrow(2)$ đúng, nghĩa là (1) đúng với $n=k+1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\forall n\in N^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y=\frac{1}{x+3}\left(n\in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Ta có: $y'=(-1)'\frac{1}{(x+3)^2}=(-1)'\frac{1!}{(x+3)^2}$;

$$y''=(-1)^2.\frac{1.2}{(x+3)^3}=(-1)^2.\frac{2!}{(x+3)^3}.$$

Dự đoán: $y^n=(-1)^n\frac{n!}{(x+3)^{n+1}}\quad (1),\forall n\in N^*$.

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

$*n=1:(1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n=k\ge 1$, nghĩa là ta có: $y^k=(-1)^k\frac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cũng đúng với $n=k+1$, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{k+1}=(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}\quad (2)$$

Thật vậy: vế trái

$$(2)=y^{k+1}=\left[y^k\right]'=\left[(-1)^k\frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]'=(-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$=(-1)^{k+1}.\dfrac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}}=(-1)^{k+1}.\dfrac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}}=vt(2)$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n=k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^n=(-1)^n.\dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}},\forall n\in N^*$.

DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức:

Bài 11:

a). Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh $x.y''-2(y'-\sin x)+xy=0 \quad (*)$

b). Cho hàm số : $y=\sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3.y''+1=0 \quad (*)$

c). Cho hàm số: $y=x\tan x$ chứng minh: $x^2.y''-2(x^2+y^2)(1+y)=0 \quad (*)$

d). Cho hàm số: $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2=(y-1).y'' \quad (*)$

LỜI GIẢI

a). Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh $x.y''-2(y'-\sin x)+xy=0 \quad (*)$

Ta có $y'=(x\sin x)' \Leftrightarrow y'=x'.\sin x+x.(\sin x)' \Leftrightarrow y'=\sin x+x\cos x$

$y''=(\sin x+x\cos x)'=(\sin x)'+(x\cos x)'=\cos x+x'.\cos x+x.(\cos x)'=2\cos x-x\sin x$

$(1)\Leftrightarrow x(2\cos x-x\sin x)-2(\sin x+x\cos x-\sin x)+x^2\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2x\cos x-x^2\sin x-2x\cos x+x^2\sin x=0\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

b). Cho hàm số : $y=\sqrt{2x-x^2}$ chứng minh: $y^3.y''+1=0 \quad (*)$

Ta có: $y'=\left(\sqrt{2x-x^2}\right)'\Leftrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}.(2x-x^2)'=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y''=\frac{(1-x)'.\sqrt{2x-x^2}-\left(\sqrt{2x-x^2}\right)'.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}$$

$$=\frac{-(2x-x^2)-(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}.\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}=\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}.$$