CHƯƠNG II: ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

BÀI : ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

PHẦN 1 – LÝ THUYẾT

1. Các tính chất thừa nhận.

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4: Có bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Vậy thì: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng .

Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

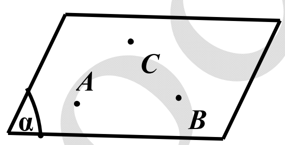
2. Cách xác định mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

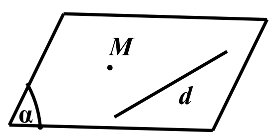
- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Các kí hiệu:

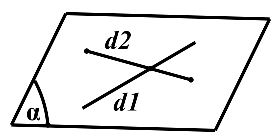
- (ABC) là kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C (h1)
- (M, d) là kí hiệu mặt phẳng đi qua d và điểm $M \notin d$ (h2)
- (d_1, d_2) là kí hiệu mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau d_1, d_2 (h3)



(h1)



(h2)



(h3)

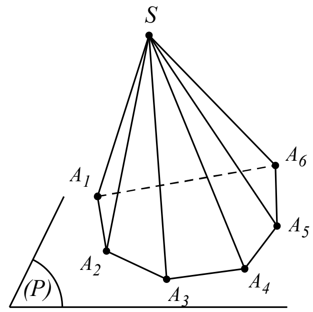
3. Hình chóp và hình tứ diện.

3.1. Hình chóp.

Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α).

Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp , kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy , các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên…



3.2. Hình Tứ diện

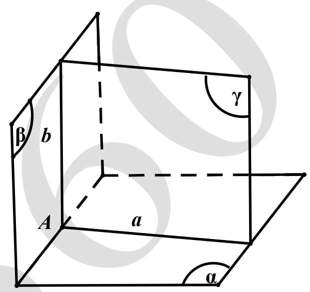
Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và (BCD) được gọi là tứ diện $ABCD$.

PHẦN 2 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp giải:

Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau :

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ chính là điểm chung của (α) và (β).

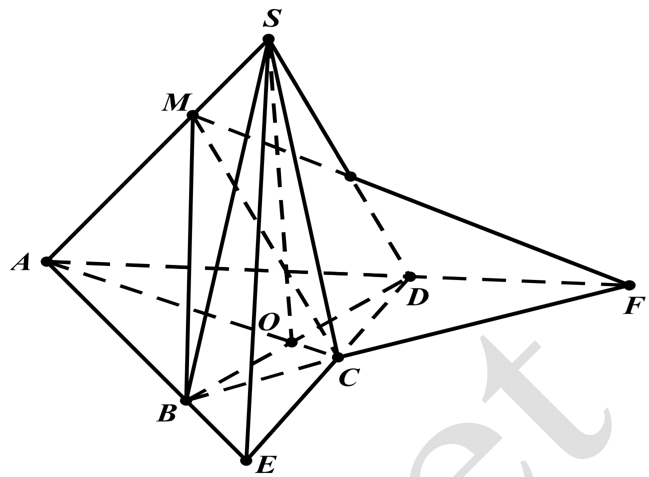
Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng :

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD)

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD)

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ Lại có

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

$S \in (SAC) \cap (SBD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

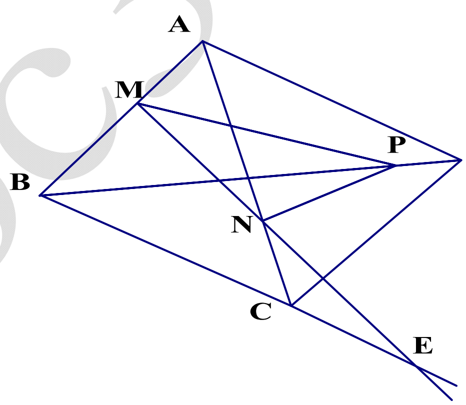
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$, ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Ví dụ 2. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Tìm giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Lời giải



- $P \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow P \in (BCD)$
- $P \in (BCD)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

Trong mp (ABC), gọi $E = MN \cap BC$

- $E \in BC$ mà $BC \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$
- $E \in MN$ mà $MN \subset (MNP) \Rightarrow E \in (MNP)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (BCD) và (MNP)

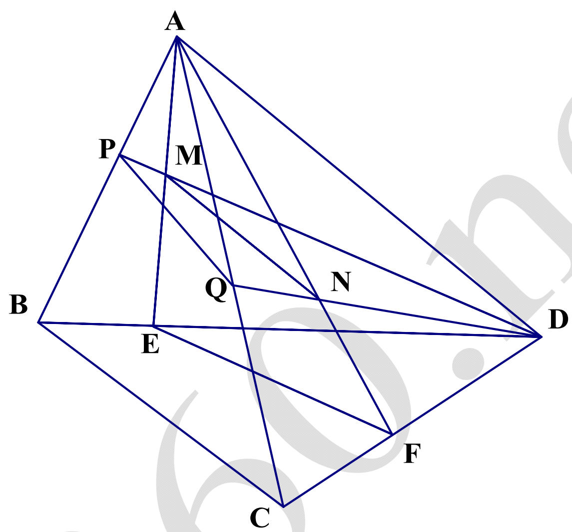
Vậy PE là giao tuyến của (BCD) và (MNP).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mp sau

a) (AMN) và (BCD)

b) (DMN) và (ABC)

Lời giải



a) Tìm giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Trong (ABD), gọi $E = AM \cap BD$

- $E \in AM$ mà $AM \subset (AMN) \Rightarrow E \in (AMN)$
- $E \in BD$ mà $BD \subset (BCD) \Rightarrow E \in (BCD)$

$\Rightarrow E$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Trong (ACD), gọi $F = AN \cap CD$

- $F \in AN$ mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow F \in (AMN)$
- $F \in CD$ mà $CD \subset (BCD) \Rightarrow F \in (BCD)$

$\Rightarrow F$ là điểm chung của (AMN) và (BCD)

Vậy EF là giao tuyến của (AMN) và (BCD)

b) Tìm giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Trong (ABD), gọi $P = DM \cap AB$

- $P \in DM$ mà $DM \subset (DMN) \Rightarrow P \in (DMN)$
- $P \in AB$ mà $AB \subset (ABC) \Rightarrow P \in (ABC)$

$\Rightarrow P$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

Trong (ACD), gọi $Q = DN \cap AC$

- $Q \in DN$ mà $DN \subset (DMN) \Rightarrow Q \in (DMN)$
- $Q \in AC$ mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow Q \in (ABC)$

$\Rightarrow Q$ là điểm chung của (DMN) và (ABC)

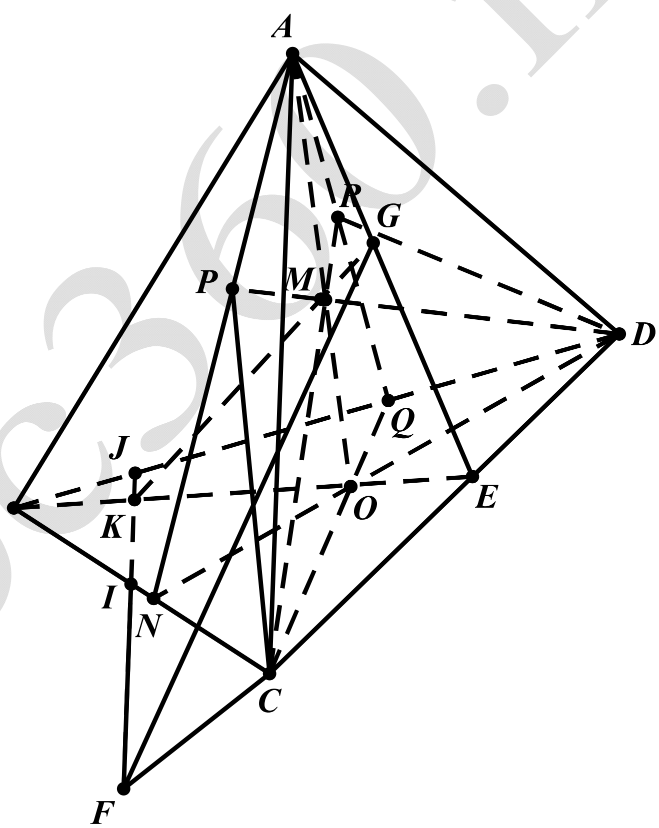
Vậy PQ là giao tuyến của (DMN) và (ABC)

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$, O là một điểm thuộc miền trong tam giác BCD, M là điểm trên đoạn AO

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MCD) với các mặt phẳng $(ABC),(ABD)$.

b) Gọi I, J là các điểm tương ứng trên các cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IJM) và (ACD).

Lời giải



a) Trong (BCD) gọi $N = DO \cap BC$, trong (ADN) gọi $P = DM \cap AN$

$$\Rightarrow \begin{cases} P \in DM \subset (CDM) \\ P \in AN \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow P \in (CDM) \cap (ABC)$$

Lại có $C \in (CDM) \cap (ABC) \Rightarrow PC = (CDM) \cap (ABC)$.

Tương tự, trong (BCD) gọi $Q = CO \cap BD$, trong (ACQ) gọi $R = CM \cap AQ$

$\Rightarrow \begin{cases} R \in CM \subset (CDM) \\ R \in AQ \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow R \in (CDM) \cap (ABD)$

$\Rightarrow D$ là điểm chung thứ hai của (MCD) và (ABD) nên $DR = (CDM) \cap (ABD)$.

b) Trong (BCD) gọi $E = BO \cap CD, F = IJ \cap CD$, $K = BE \cap IJ$;

trong (ABE) gọi $G = KM \cap AE$.

Ta có:

$\begin{cases} F \in IJ \subset (IJM) \\ F \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJM) \cap (ACD)$,

$\begin{cases} G \in KM \subset (IJM) \\ G \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow G \in (IJM) \cap (ACD)$.

Vậy $FG = (IJM) \cap (ACD)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

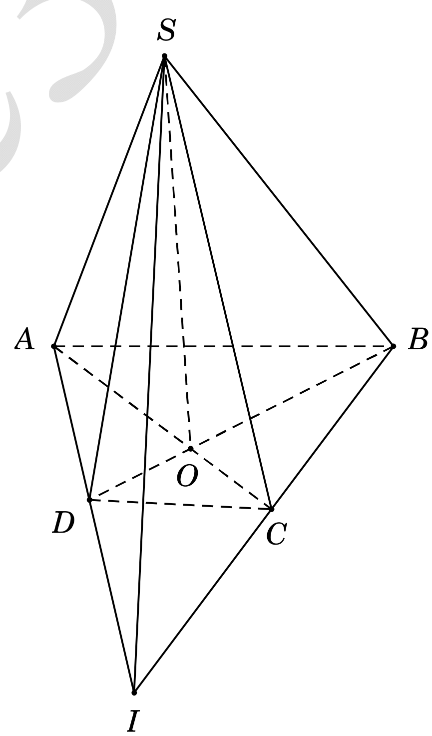
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải

Chọn D



- Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$. Do đó A đúng.
- S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$. Do đó B đúng.

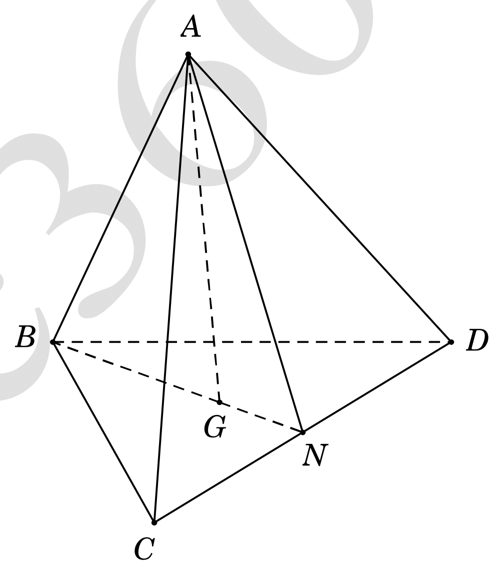
- Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$. Do đó C đúng.
- $(SAB) \cap (SAD) = SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$. Do đó D sai.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là:

A. AM (M là trung điểm của AB). **B.** AN (N là trung điểm của CD).
C. AH (H là hình chiếu của B trên CD). **D.** AK (K là hình chiếu của C trên BD).

Lời giải

Chọn B



- A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).
- Ta có $BG \cap CD = N \longrightarrow \begin{cases} N \in BG \subset (ABG) \Rightarrow N \in (ABG) \\ N \in CD \subset (ACD) \Rightarrow N \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow N$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

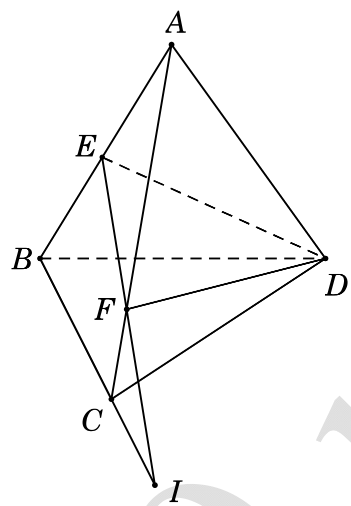
Vậy $(ABG) \cap (ACD) = AN$.

Ví dụ 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I, thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCD) và (DEF). **B.** (BCD) và (ABC). **C.** (BCD) và (AEF). **D.** (BCD) và (ABD).

Lời giải

Chọn D



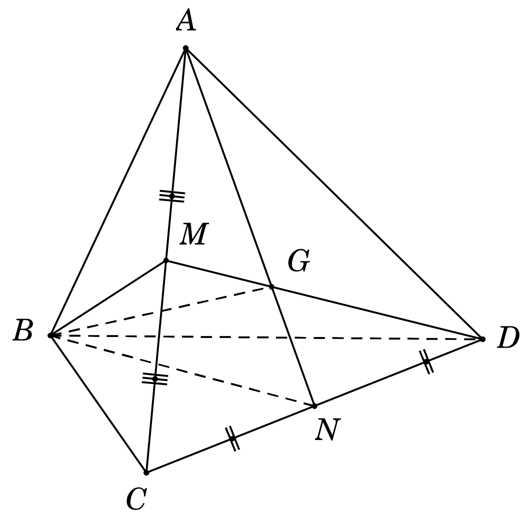
Điểm I là giao điểm của EF và BC mà $\begin{cases} EF \subset (DEF) \\ EF \subset (ABC) \\ EF \subset (AEF) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = (BCD) \cap (DEF) \\ I = (BCD) \cap (ABC) \\ I = (BCD) \cap (AEF) \end{cases}$.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là:

A. đường thẳng MN.
B. đường thẳng AM.
C. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
D. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).

Lời giải

Chọn C



- B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là:

A. SD.

B. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).

C. SG (G là trung điểm AB).

D. SF (F là trung điểm CD).

Lời giải

Chọn B