VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A) CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I) CÁC ĐỊNH NGHĨA

1) Vectơ, giá và độ dài của vectơ

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu là A điểm cuối là B. Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, ...$

Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vec tơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại hai vec tơ có giá cắt nhau được gọi là hai vec tơ không cùng phương. Hai vec tơ cùng phương có thể cùng hướng hoặc khác hướng.

Độ dài của vec tơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó. Vectơ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị. Ta kí hiệu độ dài vec tơ là $|\vec{a}|, |\vec{x}|, |\vec{u}|, |\overrightarrow{AB}|$. Như vậy $|\overrightarrow{AB}| = AB$.

2) Hai vec tơ bằng nhau, vec tơ – không

Hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng. Khi đó ta kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Vectơ – không là một vec tơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, nghĩa là với mọi điểm A tùy ý ta có $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ và khi đó mọi đường thẳng đi qua điểm A đều chứa vectơ $\overrightarrow{AA}$. Do đó ta quy ước mọi vec tơ $\vec{0}$ đều bằng nhau, có độ dài bằng 0 và cùng phương, cùng hướng với mọi vec tơ. Do đó ta viết $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ với mọi điểm A, B tùy ý.

II) PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ VECTƠ

1) Định nghĩa:

- Cho hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Véc tơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đồng thời được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- Vec tơ $\vec{b}$ là vec tơ đối của $\vec{a}$ nếu $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ và $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng nhau, kí hiệu $\vec{b} = -\vec{a}$.
- $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$

2) Tính chất

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (tính chất kết hợp).

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

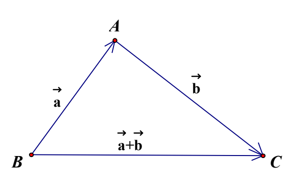
3) Các quy tắc cần nhớ khi tính toán

a) Quy tắc ba điểm

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có:

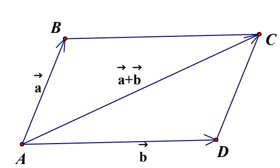
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

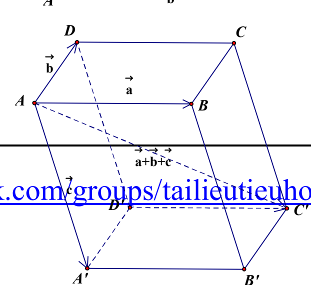


b) Quy tắc hình bình hành

Với ABCD là hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



c) Quy tắc hình hộp



Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ với AB, AD, AA’ là ba cạnh có chung đỉnh A và AC’ là đường chéo, ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

d) Mở rộng quy tắc ba điểm

Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ bất kì, ta có:

$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

III). PHÉP NHÂN VEC TƠ VỚI MỘT SỐ

1) Định nghĩa

Cho số $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ khi $k>0$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ khi $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$

2). Tính chất

Với mọi vec tơ $\vec{a}, \vec{b}$ với mọi số m, n ta có:

$m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+m\vec{b}$

$(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$

$m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}$

$1.\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

$0.\vec{a}=\vec{0}$; $k.\vec{0}=\vec{0}$.

IV). ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VEC TƠ

1). Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vec tơ trong không gian

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng, ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

2). Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

3). Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:

Định lí 1: Trong không gian cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

4). Phân tích (biểu thị) một vectơ theo ba vec tơ không đồng phẳng.

Định lí 2:

Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Với mọi vectơ $\vec{x}$ trong không gian ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

Cụ thể $\overrightarrow{OX}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ và $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$ với $\overrightarrow{OA'}=m\vec{a}, \overrightarrow{OB'}=n\vec{b}, \overrightarrow{OC'}=p\vec{c}$. Khi đó $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$

B) PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

VẤN ĐỀ 1:Chứng minh đẳng thức vectơ

PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp để biến đổi vế này thành vế kia và ngược lại.

Sử dụng các tính chất của phép toán về vec tơ và các tính chất hình học của hình đã cho.

Câu 1: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Chứng minh $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$

LỜI GIẢI

Theo tính chất hình hộp:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$$

Dựa vào quy tắc hình hộp ta có thể viết ngay kết quả:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ (1) và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật. Chứng minh:

$\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$

LỜI GIẢI

Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD.

Ta có $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|$

$$\overrightarrow{SA}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}\right)^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{SO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)$$

Mà $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=0$ nên $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được: $\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2=2\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OC}^2$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{SA}^2+\overrightarrow{SC}^2=\overrightarrow{SB}^2+\overrightarrow{SD}^2$

Câu 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

b). Điểm G là trọng tâm của tứ diện khi và chỉ khi: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

LỜI GIẢI

a). Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ (1) và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$ (2).

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có:

$$2\overrightarrow{MN}=\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\underbrace{\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}}_{\vec{0}}\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$$

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

b). Theo tính chất trung điểm có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\Leftrightarrow$ G là trung điểm MN $\Leftrightarrow$ G là trọng tâm tứ diện ABCD.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD

a). Chứng minh rằng nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$. Điều ngược lại có đúng không?

b). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow \overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

Vậy với hình chóp S.ABCD thì đáy ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

b). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD thì:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON}$

Theo đề bài có $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{SO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$. Điều này chứng tỏ ba điểm O, M, N thẳng hàng và O trung điểm của MN. Mặt khác $M\in AC,\ N\in BD,\ O=AC\cap BD\Rightarrow O\equiv M\equiv N$, có nghĩa O trung điểm của AC và BD, hay ABCD là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' với tâm O. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b). $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'C}$

c). $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=\vec{0}$

LỜI GIẢI

a). Ta có ABCD và A'B'C'D' là các hình bình hành, nên:

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b). Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{A'C'}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{A'C}$

Vì $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{B'C'};\ \overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{D'D}$ nên:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{D'D}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{A'C}$

c). Vì O là tâm nên O là trung điểm của các đường chéo AC', BD', CA', do đó:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$

$=\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC'}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD'}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA'}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB'}}_{\vec{0}}=\vec{0}$

Câu 7: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, H, K, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh:

$AB^2+CD^2+AC^2+BD^2+BC^2+AD^2=4\left(IJ^2+HK^2+EF^2\right)$.

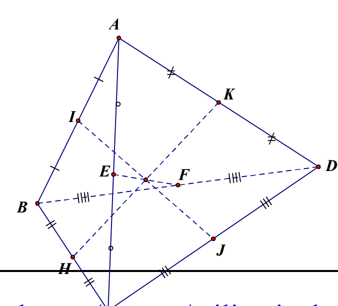
LỜI GIẢI

Ta có:

- $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{IJ}$

  $\Rightarrow 4IJ^2=AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$ (1)

- $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}=2\overrightarrow{EF}$



$\Rightarrow 4EF^2 = AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ (2)

- $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HB} = 2\overrightarrow{KH}$

$\Rightarrow 4KH^2 = AC^2 + DB^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ (3)

Lấy (1), (2), (3) vế cộng theo vế được: $4\left(IJ^2 + HK^2 + EF^2\right)$

$= AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 + 2\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}\right)$

Mà: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}\right) = \vec{0}$

Do đó: $AB^2 + CD^2 + AC^2 + BD^2 + BC^2 + AD^2 = 4\left(IJ^2 + HK^2 + EF^2\right)$

Câu 8: Chứng minh rằng tứ diện ABCD và A’B’C’D’ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

LỜI GIẢI

Gọi G và G’ lần lượt là trọng tâm của các tứ diện ABCD và A’B’C’D’. Theo tính chất trọng tâm có:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}$

Sử dụng quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'D'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG}}_{\vec{0}} + \underbrace{\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'C'} + \overrightarrow{G'D'}}_{\vec{0}} + 4\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow G \equiv G'$ (đpcm).

Câu 9: Cho tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E và F thỏa:

a). $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ b). $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

LỜI GIẢI

a) Gọi G trọng tâm tam giác BCD. Theo tính chất trọng tâm có

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AG}$.

b). Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD. Thì:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} - 2\overrightarrow{AJ} = 2\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{JI} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{JI}$.

Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh:

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$

LỜI GIẢI

Ta có: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{DG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}$

Vậy $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

Câu 10: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN, và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b). $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$.

LỜI GIẢI

a). Theo tính chất trung điểm có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$, $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{ND}$

$$= 2\Big(\underbrace{\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}}_{\vec{0}}\Big)+\underbrace{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}}_{\vec{0}}=\vec{0}.$$

b). Theo câu a), ta chứng minh được: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PD}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IP}+\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{PI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right).$$

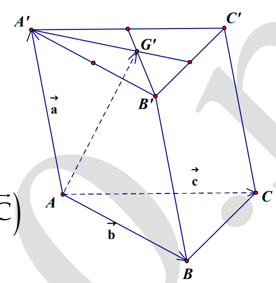
DẠNG 2: TÍNH TOÁN VÀ BIỂU DIỄN

Câu 1: Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a};\ \overrightarrow{AB}=\vec{b};\ \overrightarrow{AC}=\vec{c}$.

a). Hãy biểu diễn các véc tơ $\overrightarrow{B'C},\overrightarrow{BC'}$ theo các véc tơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

b). Gọi G’ là trọng tâm của tam giác A’B’C’. Biểu thị véc tơ $\overrightarrow{AG'}$ qua $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

LỜI GIẢI



a). Ta có:

- $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{B'C'}=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}-\overrightarrow{A'B'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.
- $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

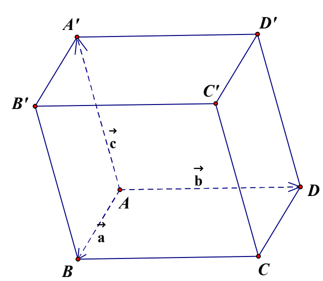
b). Vì G’ là trọng tâm tam giác A’B’C’, nên có:

$$\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$$

Câu 2: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a};\ \overrightarrow{AD}=\vec{b};\ \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Hãy biểu thị các véctơ $\overrightarrow{AC'},\ \overrightarrow{BD'},\ \overrightarrow{CA'},\ \overrightarrow{DB'},\ \overrightarrow{BC'},\ \overrightarrow{A'D}$ theo các véc tơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

LỜI GIẢI



$$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AA'}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{DB'}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'D'}=-\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{c}.$$

DẠNG 3: Chứng minh ba vectơ đồng phẳng.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Dựa vào định nghĩa, chứng tỏ các vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ có giá song song với một mặt phẳng.

Ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$, trong đó $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ không cùng phương.

Câu 1: a). Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba véc tơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

b). Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành ABFE và K là giao điểm của hai đường chéo của hình bình bình hành BCGF. Chứng minh ba véc tơ $\overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{IK},\ \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

LỜI GIẢI

a). Theo giả thuyết có $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$

Mặt khác $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (1).

Và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DC} + 3\overrightarrow{CN}$ (2).

Cộng đẳng thức (1) và (2) vế theo vế ta có:

$4\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MD}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CN}}_{\vec{0}} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$. Từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

b). Ta có $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{GF} + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$ (Vì $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IK}$).

Vậy $\overrightarrow{BD} = -2\overrightarrow{GF} - 2\overrightarrow{IK}$. Từ hệ thức này chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 2: Trong không gian cho tam giác ABC.

a). Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi O.

b). Ngược lại có một điểm O trong không gian sao cho: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

LỜI GIẢI

a). Vì ABC là tam giác nên hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Điểm M thuộc (ABC) suy ra ba véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng, tức là có một cặp số y, z thỏa:

$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + z\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

Đặt $x = 1 - y - z \Leftrightarrow x + y + z = 1$

Khi đó ta có $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ (1) với $x + y + z = 1$ (2).

b). Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho:

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì $M \in (ABC)$

Thật vậy từ (2) suy ra $x = 1 - y - z$ thay vào (1) được:

$\overrightarrow{OM} = (1 - y - z)\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + y\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + y\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = y\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) + y\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$ (3).

Hệ thức (3) chứng tỏ ba véc tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ đồng phẳng và có cùng gốc A suy ra $M \in (ABC)$.

Câu 3: Cho hình chóp S.ABC. Trên các tia SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' thỏa $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mp(A'B'C') đi qua trọng tâm của của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

LỜI GIẢI

Vì A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, nên: $\overrightarrow{SA} = a\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB} = b\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SC} = c\overrightarrow{SC'}$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo tính chất trọng tâm có: