# CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 8

# CHUYÊN ĐỀ 19 – TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC

## A. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

**1) Khái niệm:** Nếu với mọi giá trị của biến thuộc một khoảng xác định nào đó mà giá trị của biểu thức A luôn luôn lớn hơn hoặc bằng (nhỏ hơn hoặc bằng) một hằng số k và tồn tại một giá trị của biến để A có giá trị bằng k thì k gọi là giá trị nhỏ nhất (giá trị lớn nhất) của biểu thức A ứng với các giá trị của biến thuộc khoảng xác định nói trên

**2) Phương pháp**

a) Để tìm giá trị nhỏ nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \geq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

b) Để tìm giá trị lớn nhất của A, ta cần:

+ Chứng minh $A \leq k$ với k là hằng số

+ Chỉ ra dấu "=" có thể xảy ra với giá trị nào đó của biến

Kí hiệu : min A là giá trị nhỏ nhất của A; max A là giá trị lớn nhất của A

## B.Các bài tập tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức

### I) Dạng 1: Tam thức bậc hai

**Ví dụ 1 :**

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 2x^2 - 8x + 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $B = -5x^2 - 4x + 1$

Giải

a) $A = 2(x^2 - 4x + 4) - 7 = 2(x - 2)^2 - 7 \geq -7$

$\min A = -7 \Leftrightarrow x = 2$

b) $B = -5(x^2 + \frac{4}{5}x) + 1 = -5(x^2 + 2.x.\frac{2}{5} + \frac{4}{25}) + \frac{9}{5} = \frac{9}{5} - 5(x + \frac{2}{5})^2 \leq \frac{9}{5}$

$\max B = \frac{9}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

**b) Ví dụ 2:** Cho tam thức bậc hai $P(x) = a x^2 + bx + c$

a) Tìm min P nếu $a > 0$

b) Tìm max P nếu $a < 0$

Giải

Ta có: $P = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$

Đặt $c - \frac{b^2}{4a} = k$. Do $(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ nên:

a) Nếu $a > 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \geq 0$ do đó $P \geq k \Rightarrow \min P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

b) Nếu $a < 0$ thì $a(x + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$ do đó $P \leq k \Rightarrow \max P = k \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

**II. Dạng 2: Đa thức có dấu giá trị tuyệt đối**

**1) Ví dụ 1:** Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = (3x - 1)^2 - 4\,|3x - 1| + 5$

đặt $|3x - 1| = y$ thì $A = y^2 - 4y + 5 = (y - 2)^2 + 1 \geq 1$

min $A = 1 \Leftrightarrow y = 2 \Leftrightarrow |3x - 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 1 = 2 \\ 3x - 1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

b) $B = |x - 2| + |x - 3|$

$B = |x - 2| + |x - 3| = B = |x - 2| + |3 - x| \geq |x - 2 + 3 - x| = 1$

$\Rightarrow$ min $B = 1 \Leftrightarrow (x - 2)(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

**2) Ví dụ 2:** Tìm GTNN của $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2|$

Ta có $C = |x^2 - x + 1| + |x^2 - x - 2| = |x^2 - x + 1| + |2 + x - x^2| \geq |x^2 - x + 1 + 2 + x - x^2| =$ 3

min $C = 3 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(2 + x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

**3) Ví dụ 3:**

Tìm giá trị nhỏ nhất của : $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4|$

Ta có $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x| \geq |x-1+4-x| = 3$ (1)

Và $|x-2| + |x-3| = |x-2| + |3-x| \geq |x-2+3-x| = 1$ (2)

Vậy $T = |x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| \geq 1 + 3 = 4$

Ta có từ (1) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $1 \le x \le 4$

(2) $\Rightarrow$ Dấu bằng xảy ra khi $2 \le x \le 3$

Vậy T có giá trị nhỏ nhất là 4 khi $2 \le x \le 3$

**III.Dạng 3: Đa thức bậc cao**

1) Ví dụ 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $A = x(x - 3)(x - 4)(x - 7) = (x^2 - 7x)(x^2 - 7x + 12)$

Đặt $x^2 - 7x + 6$ thì $A = (y - 6)(y + 6) = y^2 - 36 \ge -36$

Min $A = -36 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 6$

b) $B = 2x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 3 = (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + 2$

$= (x - y)^2 + (x - 1)^2 + 2 \ge 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

c) $C = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y = x^2 - 2x + y^2 - 2y + xy - x - y$

Ta có $C + 3 = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (xy - x - y + 1)$

$= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 1)(y - 1)$. Đặt $x - 1 = a$; $y - 1 = b$ thì

$C + 3 = a^2 + b^2 + ab = (a^2 + 2.a.\frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}) + \frac{3b^2}{4} = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} \ge 0$

Min $(C + 3) = 0$ hay min $C = -3 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

2) Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $C = (x + 8)^4 + (x + 6)^4$