CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 8

CHUYÊN ĐỀ 15 – SỬ DỤNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH ĐỂ THIẾT LẬP QUAN HỆ ĐỘ DÀI CỦA CÁC ĐOẠN THẲNG

A. Một số kiến thức:

1. Công thức tính diện tích tam giác:

$S = \frac{1}{2}$ a.h (a – độ dài một cạnh, h – độ dài đường cao tương ứng)

2. Một số tính chất:

Hai tam giác có chung một cạnh, có cùng độ dài đường cao thì có cùng diện tích

Hai tam giác bằng nhau thì có cùng diện tích

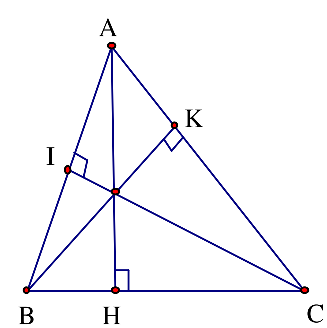
B. Một số bài toán:

1. Bài 1:

Cho ΔABC có AC = 6cm; AB = 4 cm; các đường cao AH; BK; CI. Biết $AH = \frac{CI + BK}{2}$

Tính BC

Giải



Ta có: $BK = \frac{2S_{ABC}}{AC}$; $CI = \frac{2S_{ABC}}{AB}$

$\Rightarrow BK + CI = 2.\ S_{ABC}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}\right)$

$\Leftrightarrow$ 2AH = $2.\frac{1}{2}$. BC. AH . $\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right)$ $\Leftrightarrow$ BC.$\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right) = 2$

$\Rightarrow$ BC = 2 : $\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}\right) = 2 : \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right) = 4,8$ cm

Bài 2:

Cho ΔABC có độ dài các cạnh là a, b, c; độ dài các đường cao tương ứng là h_a, h_b, h_c. Biết rằng $a + h_a = b + h_b = c + h_c$. Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều

Giải

Gọi $S_{ABC} = S$

Ta xét $a + h_a = b + h_b \Rightarrow a - b = h_a - h_b = \frac{2S}{b} - \frac{2S}{a} = 2S.\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = 2S.\ \frac{a - b}{ab}$

$\Rightarrow a - b = 2S.\ \frac{a - b}{ab} \Rightarrow (a - b)\left(1 - \frac{2S}{ab}\right) = 0 \Rightarrow$ ΔABC cân ở C hoặc vuông ở C (1)

Tương tự ta có: ΔABC cân ở A hoặc vuông ở A (2); ΔABC cân ở B hoặc vuông ở B (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra ΔABC cân hoặc vuông ở ba đỉnh (Không xảy ra vuông tại ba đỉnh) $\Leftrightarrow$ ΔABC là tam giác đều

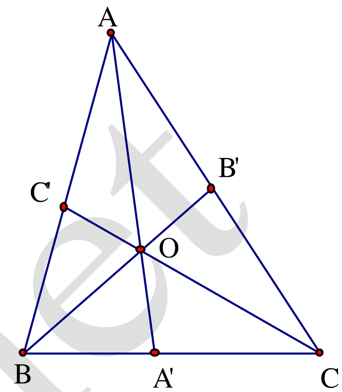
Bài 3:

Cho điểm O nằm trong tam giác ABC, các tia AO, BO, Co cắt các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại A', B', C'. Chứng minh rằng:

a) $\frac{OA'}{AA'}+\frac{OB'}{BB'}+\frac{OC'}{CC'}=1$ b) $\frac{OA}{AA'}+\frac{OB}{BB'}+\frac{OC}{CC'}=2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = 6$. Tìm vị trí của O để tổng M có giá trị nhỏ nhất

d) $N = \frac{OA}{OA'} . \frac{OB}{OB'} . \frac{OC}{OC'} = 8$. Tìm vị trí của O để tích N có giá trị nhỏ nhất



Giải

Gọi $S_{ABC} = S$, $S_1 = S_{BOC}$, $S_2 = S_{COA}$, $S_3 = S_{AOB}$. Ta có:

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{S_2}{S_{OA'C}} = \frac{S_3}{S_{OA'B}} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} \quad (1)$$

$$\frac{OA'}{AA'} = \frac{S_{OA'C}}{S_{AA'C}} = \frac{S_{OA'B}}{S_{AA'B}} = \frac{S_{OA'C} + S_{OA'B}}{S_{AA'C} + S_{AA'B}} = \frac{S_1}{S} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{OA}{AA'} = \frac{S_2 + S_3}{S}$

Tương tự ta có $\frac{OB}{OB'} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}$; $\frac{OC}{OC'} = \frac{S_1 + S_2}{S_3}$; $\frac{OB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}$; $\frac{OC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}$

a) $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} = \frac{S}{S} = 1$

b) $\frac{OA}{AA'} + \frac{OB}{BB'} + \frac{OC}{CC'} = \frac{S_2 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_3}{S} + \frac{S_1 + S_2}{S} = \frac{2S}{S} = 2$

c) $M = \frac{OA}{OA'} + \frac{OB}{OB'} + \frac{OC}{OC'} = \frac{S_2 + S_3}{S_1} + \frac{S_1 + S_3}{S_2} + \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right)$

Aùp dụng Bđt Cô si ta có $\left(\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_1}\right) + \left(\frac{S_3}{S_2} + \frac{S_2}{S_3}\right) + \left(\frac{S_1}{S_3} + \frac{S_3}{S_1}\right) \ge 2 + 2 + 2 = 6$

Đẳng thức xẩy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 \Leftrightarrow$ O là trọng tâm của tam giác ABC