PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI SINX VÀ COSX

I. LÝ THUYẾT

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT:

DẠNG: $\begin{cases} \circ\ a\sin u + b\cos u = c \\ \circ\ a\sin u - b\cos u = c \\ \circ\ a\cos u - b\sin u = c \end{cases}$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là : $a^2 + b^2 \geq c^2$

Giả sử giải phương trình: $a\sin u + b\cos u = c\ (*)$

Cách giải chia hai vế của (*) cho $\sqrt{a^2+b^2}$

Ta được : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.

$\Leftrightarrow \sin u.\cos\varphi + \sin\varphi.\cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(u+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (**)

Đặt $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$.

(**) $\Leftrightarrow \sin(u+\varphi) = \sin\alpha$. Giải phương trình cơ bản.

II. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: Giải các phương trình sau:

1). $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ **2).** $3\sin x - 4\cos x = 5$

3). $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ **4).** $\sin x - \cos x = 1$

5). $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ **6).** $5\sin 2x + 12\cos 2x = 13$

7). $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}\left(\sin 6x + \cos 8x\right)$ **8).** $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x.\cos x$

9). $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$ **10).** $3\cos x - 4\sin x + \dfrac{2}{3\cos x - 4\sin x - 6} = 3$

11). $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) + \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

LỜI GIẢI

1). $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ **(1)**

Ta có $a = 1, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Chia hai vế của (1) cho 2 được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \cos x.\cos\frac{\pi}{3} + \sin x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{7\pi}{12} + k2\pi, x = \dfrac{\pi}{12} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

2). $3\sin x - 4\cos x = 5$ (1). Ta có $a = 3, b = 4, c = 5 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Chia hai vế của (1) cho 5 được:

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{3}{5}\sin x - \dfrac{4}{5}\cos x = 1$. Đặt $\dfrac{3}{5} = \cos\alpha \Rightarrow \dfrac{4}{5} = \sin\alpha$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\alpha - \cos x.\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \alpha\right) = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ Vậy nghiệm của phương trình: $x = \alpha + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $\sqrt{3}\sin x - \cos x = \sqrt{2}$ (1).

Ta có $a = \sqrt{3}, b = 1, c = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$. Chia hai vế của (1) cho 2 được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos x.\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{11\pi}{12}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4). $\sin x-\cos x=1$ (1)

Ta có $a=1,b=1,c=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$. Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{2}$ được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{4}-\cos x.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}$ (1) Ta có $a=1,b=1,c=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$. Chia hai vế của (1) cho $\sqrt{2}$ được: $(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

6). $5\sin 2x+12\cos 2x=13$ (1). Ta có $a=5,b=12,c=13 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=13$. Chia hai vế của (1) cho 13 được: $(1) \Leftrightarrow \frac{5}{13}\sin 2x+\frac{12}{13}\cos 2x=1$. Đặt $\cos\alpha=\frac{5}{13} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{13}$.

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cos\alpha+\sin\alpha\cos 2x=1 \Leftrightarrow \sin(2x+\alpha)=1 \Leftrightarrow 2x+\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}\left(\sin 6x + \cos 8x\right)\ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin 8x - \sqrt{3}\cos 8x = \sqrt{3}\sin 6x + \cos 6x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 8x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\cos 6x$

$\Leftrightarrow \sin 8x.\cos\frac{\pi}{3} - \cos 8x.\sin\frac{\pi}{3} = \sin 6x.\cos\frac{\pi}{6} + \cos 6x.\sin\frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x - \frac{\pi}{3} = 6x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(6x + \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{7} \end{array}\right.$$

8). $\sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\sin x.\cos x\ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 2x \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{4} + \cos x.\sin\frac{\pi}{4} = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3} \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k2\pi}{3}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

9). $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos\frac{\pi}{6} - \cos 2x.\sin\frac{\pi}{6} = 1$

$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

10). $3\cos x - 4\sin x + \frac{2}{3\cos x - 4\sin x - 6} = 3\ \ (1)$

Đặt $t=3\cos x-4\sin x-6\Rightarrow 3\cos x-4\sin x=t+6$

$(1)\Leftrightarrow t+6+\frac{2}{t}=3\Leftrightarrow t^2+3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-2\end{array}\right.$

Với $t=-1\Leftrightarrow 3\cos x-4\sin x=5\ \Leftrightarrow\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x=1$. Đặt $\cos\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$\Leftrightarrow\cos x.\cos\alpha-\sin x.\sin\alpha=1$

$\Leftrightarrow\cos(x+\alpha)=1\Leftrightarrow x+\alpha=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\alpha+\frac{\pi}{2}+k2\pi$.

Với $t=-2\Leftrightarrow 3\cos x-4\sin x=4\Leftrightarrow\frac{3}{5}\cos x-\frac{4}{5}\sin x=\frac{4}{5}$. Đặt $\cos\alpha=\frac{3}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

$\Leftrightarrow\cos x.\cos\alpha-\sin x.\sin\alpha=\sin\alpha\ \ \Leftrightarrow\cos(x+\alpha)=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi\\x+\alpha=-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}-2\alpha+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$.

Nghiệm phương trình: $x=-\alpha+\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}-2\alpha+k2\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

11). $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$\Leftrightarrow 2.\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 3\sin x+\cos x=3$

$\Leftrightarrow\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{10}}\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$. Đặt $\frac{3}{\sqrt{10}}=\cos\alpha\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{10}}=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow\sin x.\cos\alpha+\cos x.\sin\alpha=\cos\alpha\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha+k2\pi\\x+\alpha=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}-2\alpha+k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{2}-2\alpha+k2\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$