PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2 ĐỐI VỚI SINX, COSX, TANX, COTX

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Dạng	Đặt ẩn phụ	Điều kiện
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	$t = \sin x$	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$t = \cos x$	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	$t = \tan x$	$x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	$t = \cot x$	$x \ne k\pi$, $\left(k \in \mathbb{Z}\right)$
Nớu đặt $t = \sin^2 x$ hoặc $t = \left\|\sin x\right\|$ thỡ điều kiện là $0 \le t \le 1$ (tương tự cho $\cos$)		

Câu 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$

4). $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

5). $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$

6). $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$

7). $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$

8). $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1). Đặt $\cos x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$. So với điều kiện nhận cả hai nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$,$(k\in\mathbb{Z})$

2). $4\sin^2 x+4\sin x-3=0$ (1). Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$4t^2+4t-3=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=-\frac{3}{2}$. So với điều kiện nhận $t=\frac{1}{2}\Rightarrow$ $\sin x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

3). $\sin^2 2x-13\sin 2x+5=0$ (1). Đặt $\sin 2x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$t^2-13t+5=0 \Leftrightarrow t=\frac{13+\sqrt{149}}{2}\vee t=\frac{13-\sqrt{149}}{2}$. So với điều kiện nhận $t=\frac{13-\sqrt{149}}{2}$, suy ra :

$\sin 2x=\frac{13-\sqrt{149}}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}+k2\pi\\ 2x=\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

Hoặc đặt $\frac{13-\sqrt{149}}{2}=\sin\alpha$, suy ra $\sin 2x=\sin\alpha$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\alpha+k2\pi\\ 2x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4). $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$(1). Đặt $\tan x=t,\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow t=1\vee t=-\sqrt{3}$.

Với $t=1\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

So với điều kiện nhận cả hai nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$ (1)

Đặt $\cos x=t,t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=\frac{\sqrt{3}}{2}$. So với điều kiện hai nghiệm đều nhận

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

Đặt $\cot x=t,\left(x\neq k\pi\right)$. Phương trình (1) trở thành: $t^2+4t+3=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-3$

Với $t=-1\Leftrightarrow \cot x=-1\Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=-3\Leftrightarrow \cot x=-3\Leftrightarrow \cot x=\operatorname{arccot}\left(-3\right)\Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}\left(-3\right)+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arccot}\left(-3\right)+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

7). $\cos 2x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x-2=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ (1). Đặt $\sin x=t,t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $2t^2+3t+1=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-\frac{1}{2}$

So với điều kiện hai nghiệm đều nhận.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z}) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^2 x-\cos x+1=0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0$ (1')

Đặt $\cos x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-2$. So với điều kiện nhận $t=1$. Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Câu 2: Giải các phương trình sau:

1) $2\cos^2 x-3.\cos x+1=0$

2) $\sin^2 x+3\sin x+2=0$

3) $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$

4) $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

LỜI GIẢI

1) $2\cos^2 x-3.\cos x+1=0$ (*)

Đặt $t=\cos x, -1\le t\le 1$

$(*) \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ (N) \\ t=\frac{1}{2}\ (N) \end{array}\right.$

- Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

  Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi\,;x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\,;x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\,,\ (k\in\mathbb{Z})$.

2) $\sin^2 x+3\sin x+2=0\ \ (*)$

Đặt $t=\sin x,-1\le t\le 1$

$(*)\ \Leftrightarrow t^2+3t+2=0\ \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\ (N) \\ t=-2\ (L) \end{array}\right.$

- Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

  Vậy nghiệm phương trình : $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

3) $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0\ \ (*)$

Đặt $t=\tan x$. $(*)\ \Leftrightarrow t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right.$

- Với $t=1 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

- Với $t=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

  Vậy nghiệm phương trình : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\,;\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4) $\cot^2 x+4\cot x+3=0\ \ (*)$

Đặt $t=\cot x$

$(*) \Leftrightarrow t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.$

- Với $t=-1 \Leftrightarrow \cot x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=-3 \Leftrightarrow \cot x=-3 \Leftrightarrow x=arc\cot(-3)+\mathrm{k}\,\pi,(k\in\mathbb{Z})$