CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 8

CHUYÊN ĐỀ 20 – PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN

❈ - ***PHƯƠNG PHÁP 1***: Phương pháp đưa về dạng tổng

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình có các biểu thức chứa ẩn viết được dưới dạng tổng các bình phương.*

- Biến đổi phương trình về dạng một vế là một tổng của các bình phương các biểu thức chứa ẩn; vế còn lại là tổng bình phương của các số nguyên (*số số hạng của hai vế bằng nhau*).

Các ví dụ minh hoạ:

- Ví dụ 1: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $5x^2-4xy+y^2=169$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow 4x^2-4xy+y^2+x^2=144+25=169+0\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-y)^2+x^2=144+25\\(2x-y)^2+x^2=169+0\end{cases}\quad \text{(II)}$$

Từ (I) ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x-y)^2=12^2\\x^2=5^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm5\\y=\mp2\end{cases};\begin{cases}x=\pm5\\y=\mp22\end{cases}\\ \begin{cases}(2x-y)^2=5^2\\x^2=12^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm12\\y=\mp19\end{cases};\begin{cases}x=\pm12\\y=\mp29\end{cases}\end{array}\right.$$

Tương tự từ (II) ta có:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(2x-y)^2=13^2\\x^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm13\end{cases}\\ \begin{cases}(2x-y)^2=0\\x^2=13^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm13\\y=\pm26\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $(x,y)\in\left\{\begin{array}{l}(5;-2);(5;-22);(-5;2);(-5;22);(12;-19);(12;-29)\\(-12;19);(-12;29);(0;13);(0;-13);(13;26);(-13;-26)\end{array}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $x^2+y^2-x-y=8$ (2)

hoc360.net

(2)

$\Leftrightarrow 4x^2-4x+4y^2-4y=32 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1+4y^2-4y+1=34 \Leftrightarrow (2x-1)^2+(2y-1)^2=5^2+3^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}(2x-1)^2=3^2\\(2y-1)^2=5^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2;x=-1\\y=3;y=-2\end{cases} \\ \begin{cases}(2x-1)^2=5^2\\(2y-1)^2=3^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=3;x=-2\\y=2;y=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy $(x;y)\in\{(2;3);(2;-2);(-1;3);(-1;-2);(3;2);(3;-1);(-2;2);(-2;-1)\}$

<u>Ví dụ 3</u>: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $x^3-y^3=91$ (1)

$(1)\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=91.1=13.7$ (Vì $(x^2+xy+y^2)>0$)

$$(x-y).(x^2+xy+y^2)=91.1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-y=1\\(x^2+xy+y^2)=91\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=6\\y=5\end{cases}; \begin{cases}x=-5\\y=-6\end{cases} \\ \begin{cases}x-y=91\\(x^2+xy+y^2)=1\end{cases} \Rightarrow VN\end{array}\right.$$

<u>Ví dụ 4</u>: Tìm $x;y\in Z$ thoả mãn: $x^2+x-y^2=0$ (2)

$x^2+x-y^2=0 \Rightarrow 4x^2+4x-4y^2=0 \Rightarrow (2x+1)^2-(2y)^2=1 \Rightarrow (2x+2y+1)(2x-xy+1)=1$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases}2x+2y+1=1\\2x-2y+1=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \\ \begin{cases}2x+2y+1=-1\\2x-2y+1=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Vậy: $(x;y)\in\{(0;0);(-1;0)\}$

❋ - ***<u>PHƯƠNG PHÁP 2</u>***: Phương pháp cực hạn

✪ Phương pháp: *Phương pháp này thường sử dụng với các phương trình đối xứng*

- Vì phương trình đối xứng nên $x;y;z$ có vai trò bình đẳng như nhau. Do đó; ta giả thiết $x \le y \le z$; tìm điều kiện của các nghiệm; loại trừ dần các ẩn để có phương trình đơn giản. Giải phương trình; dùng phép hoán vị để suy ra nghiệm.

✠ Ta thường giả thiết $1 \le x \le y \le z \le ....$

❀**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y;z \in Z^+$ thoả mãn: $x+y+z=x.y.z$ (1)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Ta thấy đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1 \le x \le y \le z$. Khi đó:

$(1) \Rightarrow x.y.z = x+y+z \le 3z \Rightarrow x.y \le 3$ (Vì $x;y;z \in Z^+$) $\Rightarrow x.y \in \{1;2;3\}$

* Nếu: $x.y=1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow 2+z=z$ (vô lí)

* Nếu: $x.y=2 \Rightarrow x=1; y=2; z=3$

* Nếu: $x.y=3 \Rightarrow x=1; y=3 \Rightarrow z=2<y$ (vô lí)

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;3)$

Ví dụ 2: Tìm $x;y;z \in Z^+$ thoả mãn: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$ (2)

◆ *Nhận xét – Tìm hướng giải*:

Đây là phương trình đối xứng.

Giả sử $1 \le x \le y \le z$. Khi đó:

$(2) \Rightarrow 2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{3}{x} \Rightarrow x \le \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

Với: $x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le \frac{2}{y} \Rightarrow y \le 2 \Rightarrow y \in \{1;2\}$

♦.Nếu: $y = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = 0$ (vô lí)

♦.Nếu: $y = 2 \Rightarrow z = 2$

Vậy: $x;y;z$ là hoán vị của $(1;2;2)$

✵ - ***PHƯƠNG PHÁP 3***: Phương pháp sử dụng tính chất chia hết

❀**Các ví dụ minh hoạ**:

Ví dụ 1: Tìm $x;y \in Z$ để: $A = \frac{x^2+x}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên

Ta có: $A = \frac{x^2+x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-1}{x^2+x+1} = 1 + \frac{1}{x^2+x+1}$. Khi đó:

Để A nhận giá trị nguyên thì $\frac{1}{x^2+x+1}$ nhận giá trị nguyên.

$\Rightarrow 1 \vdots (x^2+x+1) \Rightarrow (x^2+x+1) \in U_{(1)} = \{-1;1\}$

Vì : $(x^2+x+1) > 0; \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2+x+1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Vậy để A nhận giá trị nguyên thì: $x = 0$ hoặc $x = -1$