

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. LÝ THUYẾT

Các phương trình có dạng $\sin x = m$; $\cos x = m$; $\tan x = m$; $\cot x = m$ được gọi là các **phương trình lượng giác cơ bản**

1. Phương trình $\sin x = m$ (1)

- Trường hợp $|m| > 1$ thì phương trình (1) vô nghiệm.
- Trường hợp $|m| \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.
- Nếu α là một nghiệm của phương trình (1) thì nghiệm của phương trình (1) là:

$$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Với $|m| \leq 1$ thì PT (1) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Nghiệm này kí hiệu là $\arcsin m$. Do đó nghiệm của PT (1) là:

$$\begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu $\sin x = \sin \alpha$ thì nghiệm của (1) là $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\sin f(x) = \sin g(x)$ thì nghiệm của (1) là $\begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $\sin x = \sin \beta^\circ$ thì nghiệm của (1) là $\begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$.

Đặc biệt

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$- \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Phương trình $\cos x = m$ (2)

- Trường hợp $|m| > 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm.

- Trường hợp $|m| \leq 1$ thì phương trình (2) có nghiệm.

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (2) thì nghiệm của phương trình (2) là:

$$\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Chú ý: Với $|m| \leq 1$ thì PT (2) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

Nghiệm này kí hiệu là $\arccos m$. Do đó nghiệm của PT (2) là:

$$\begin{cases} x = \arccos m + k2\pi \\ x = -\arccos m + k2\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu $\cos x = \cos \alpha$ thì nghiệm của (2) là $\begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Tổng quát: $\cos f(x) = \cos g(x)$ thì nghiệm của (2) là $\begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

- Nếu $\cos x = \cos \beta^\circ$ thì nghiệm của (2) là $\begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Đặc biệt

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Phương trình $\tan x = m$ (3)

- $\forall m$ phương trình (3) luôn có nghiệm thỏa điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (3) thì nghiệm của phương trình (3) là:
 $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý: Với $\forall m$ thì PT (3) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Nghiệm này kí hiệu là $\arctan m$. Do đó nghiệm của PT (3) là:

$$x = \arctan m + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

- Nếu $\tan x = \tan \alpha$ thì nghiệm của (3) là $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\tan f(x) = \tan g(x)$ thì nghiệm của (3) là $f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $\tan x = \tan \beta^\circ$ thì nghiệm của (3) là $x = \beta^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

Đặc biệt

$$\tan x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

4. Phương trình $\cot x = m$ (4)

- $\forall m$ phương trình (4) luôn có nghiệm thỏa điều kiện $x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu α là một nghiệm của phương trình (4) thì nghiệm của phương trình (4) là:
 $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý: Với $\forall m$ thì PT (4) luôn có duy nhất một nghiệm thuộc đoạn $(0; \pi)$. Nghiệm này kí hiệu là $\operatorname{arccot} m$. Do đó nghiệm của PT (4) là: $x = \operatorname{arccot} m + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

- Nếu $\cot x = \cot \alpha$ thì nghiệm của (4) là $x = \alpha + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Tổng quát: $\cot f(x) = \cot g(x)$ thì nghiệm của (4) là $f(x) = g(x) + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

- Nếu $\cot x = \cot \beta^\circ$ thì nghiệm của (4) là $x = \beta^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

Đặc biệt

$$\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \quad \cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\tan f(x) = \cot g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right)$$

$$\tan f(x) = -\tan g(x) \Leftrightarrow \tan f(x) = \tan(-g(x))$$

hoc360.net

II. BÀI TẬP MẪU

TÓM TẮT CÔNG THỨC

$$\begin{aligned} \circ \sin u = \sin v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) & \circ \cos u = \cos v &\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \\ \circ \tan u = \tan v &\Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) & \circ \cot u = \cot v &\Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:

$$\begin{aligned} \circ \cos u = 0 &\Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}) & \circ \sin u = 0 &\Leftrightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \circ \cos u = 1 &\Leftrightarrow u = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) & \circ \sin u = 1 &\Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ \circ \cos u = -1 &\Leftrightarrow u = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) & \circ \sin u = -1 &\Leftrightarrow u = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

a). $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ b). $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0.$

c). $3\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0$ d). $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

e). $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ f). $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

g). $2\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) + 5 = 0$ h). $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$

i). $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ k). $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$

l). $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$

LỜI GIẢI