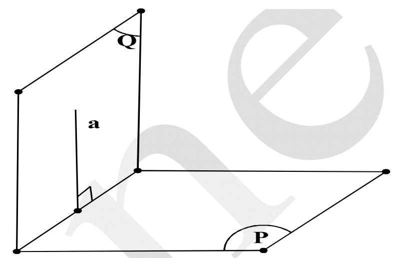
Hai mặt phẳng vuông góc

I. ĐỊNH NGHĨA

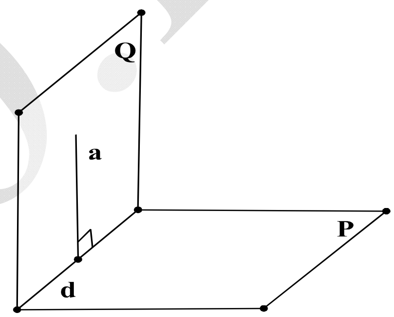
Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

II. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ



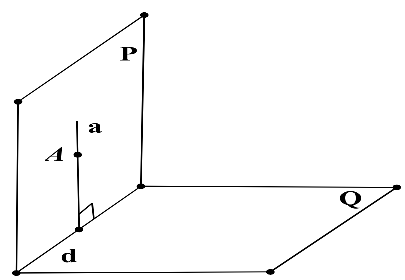
__Định lý 1__: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(P) \perp mp(Q)$$



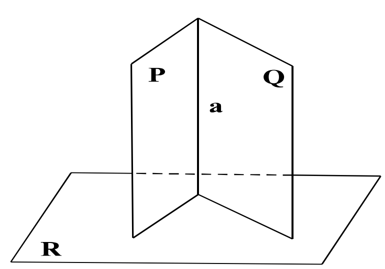
__Hệ quả 1:__ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (Q), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (Q)\ ,\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$



__Hệ quả 2:__ Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P), A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



__Định lý 2:__ Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$

HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

ĐỊNH NGHĨA:

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... được gọi là *hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác,...*

+ Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là hình lăng trụ đều. Ta có các loại lăng trụ đều như *hình lăng trụ tam giác đều , hình lăng trụ tứ giác đều , hình lăng trụ ngũ giác đều ...*

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật.*
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là *hình lập phương.*

HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HÌNH CHÓP ĐỀU

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét:

+ Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

+ Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Cách 1: Ta chứng minh mặt phẳng này **chứa một đường thẳng vuông góc** với mặt phẳng kia.

Cách 2: Ta chứng minh góc giữa chúng là 90^0.

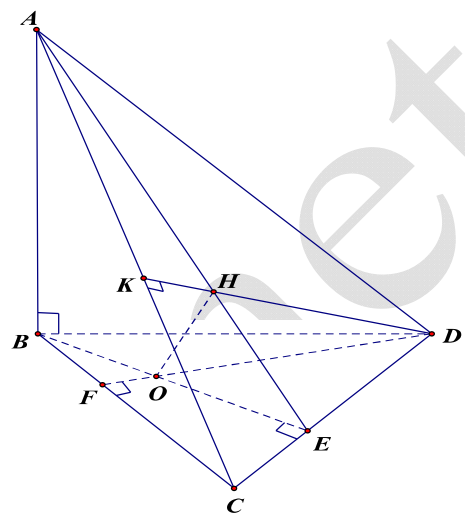
Câu 1: Cho tứ diện ABCD có AB $\perp$ (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ DK $\perp$ AC. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a). Chứng minh (ACD) $\perp$ (ABE) và (ACD) $\perp$ (DFK).

b). Chứng minh OH $\perp$ (ACD).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh (ACD) $\perp$ (ABE) và (ACD) $\perp$ (DFK).



$$\begin{cases} CD \perp BE(gt) \\ CD \perp AB\left(do\ AB \perp (BCD)\right) \\ BE, AB \subset (ABE) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE),$$

mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (ABE)$

$$\begin{cases} DF \perp BC,\ DF \perp AB \\ BC, AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC)$$

$\Rightarrow DF \perp AC\left(AC \subset (ABC)\right)\ (1).$

$$\begin{cases} AC \perp DF\left(do (1)\right),\ AC \perp DK(gt) \\ DF, DK \subset (DFK) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (DFK),$$

mà $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$

b.Chứng minh OH $\perp$ (ACD).

Ta có $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp OH\left(\text{vì } OH \subset (ABE)\right)\ (*)$

Ta có $AC \perp (DKF) \Rightarrow AC \perp OH\left(\text{vì } OH \subset (DKF)\right)\ (**)$

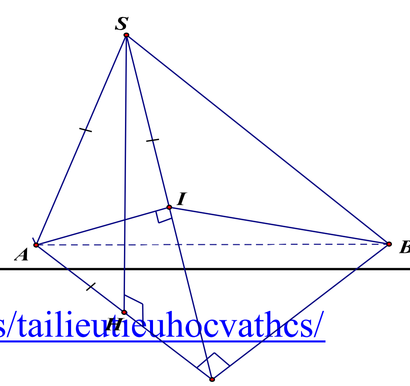
Từ $(*),(**)$: $\begin{cases} OH \perp CD,\ OH \perp AC \\ CD, AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD).$

Cách khác Ta có : $\begin{cases} (ABE) \cap (DFK) = OH \\ (ABE) \perp (ACD) \\ (DEF) \perp (ACD) \end{cases}$. Suy ra $OH \perp (ACD)$.

Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.
a). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SAC). b) Chứng minh (ABI) $\perp$ (SBC).

LỜI GIẢI

Gọi H trung điểm của AC . Ta có ΔSAC đều nên $SH \perp AC$, $AI \perp SC$.



Có $\begin{cases} (SAC)\cap(ABC)=AC \\ (SAC)\perp(ABC) \\ SH\perp AC\text{ , }SH\subset(SAC) \end{cases} \Rightarrow SH\perp mp(ABC)$.

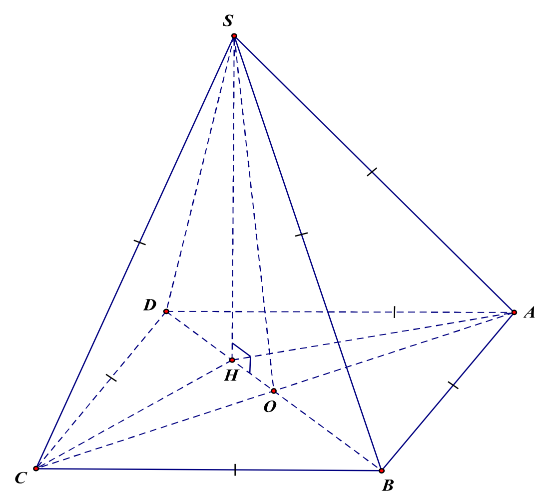
Có $\begin{cases} BC\perp AC(gt)\text{ , }BC\perp SH \\ AC,SH\subset(SAC) \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAC)$ mà $BC\subset(SBC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$

Có $\begin{cases} AI\perp SC(gt) \\ AI\perp BC\left(BC\perp(SAC)\right) \\ SC,BC\subset(SBC) \end{cases} \Rightarrow AI\perp(SBC)$ mà $AI\subset(ABI)\Rightarrow(ABI)\perp(SBC)$

Câu 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a.

a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD). b). Chứng minh tam giác SBD vuông.

LỜI GIẢI



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD) .

Vì $SA=SB=SC$ nên $HA=HB=HC$

Suy ra H nằm trên đường trung trực của đoạn AC, vậy $H\in BD$.

a). Chứng minh (SBD) $\perp$ (ABCD).

$\begin{cases} AC\perp BD \\ AC\perp SO \\ BD,SO\subset mp(SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp mp(SBD)$ mà $AC\subset(ABCD)\Rightarrow(ABCD)\perp(SBD)$.

b) Chứng minh tam giác SBD vuông.

Ta có ba tam giác : $\Delta SAC=\Delta BAC=\Delta DAC(c.c.c)$. Suy ra ba đường trung tuyến xuất phát từ 3 đỉnh tương ứng bằng nhau thì bằng nhau , nghĩa là $SO=BO=DO$.

Trong tam giác SBD có SO là đường trung tuyến và $SO=\dfrac{1}{2}BD\Rightarrow\Delta SBD$ vuông tại O.

Câu 5: Cho tam giác đều ABC. Trên đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại A lấy điểm S. Gọi D là trung điểm của BC.

a). Chứng minh (SAD) $\perp$ (SBC).

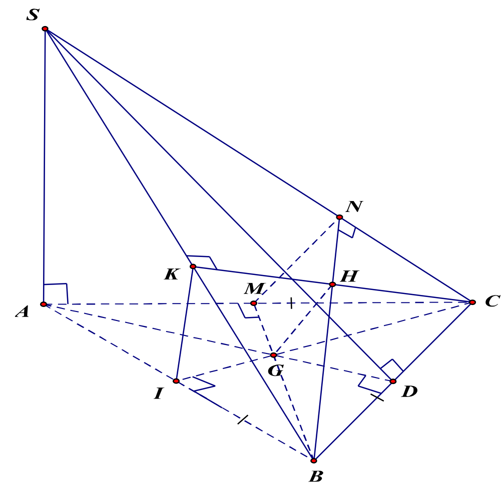
b). Kẻ CI $\perp$ AB, CK $\perp$ SB. Chứng minh SB $\perp$ (ICK).

c). Kẻ BM $\perp$ AC, MN $\perp$ SC. Chứng minh SC $\perp$ BN.

d). Chứng minh (CIK) $\perp$ (SBC) và (BMN) $\perp$ (SBC).

e). MB cắt CI tại G, CK cắt BN tại H. Chứng minh GH $\perp$ (SBC).

LỜI GIẢI



a) Chứng minh (SAD)$\perp$(SBC). Vì ΔABC đều nên $AD \perp BC$

Ta có

$$\begin{cases} BC \perp AD, BC \perp SA \\ AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD),$$

mà $BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$

b). Chứng minh SB$\perp$(ICK).

$$\begin{cases} CI \perp AB \ , \ CI \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB \quad (1)$$

có $\begin{cases} SB \perp CK(gt) \\ SB \perp CI(do(1)) \\ CK, CI \subset (CIK) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CIK)$

c). Chứng minh SC$\perp$BN. Vì ΔABC đều nên $BM \perp AC$.

Có $\begin{cases} BM \perp AC, \ BM \perp SA \\ AC, SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp SC \ (2)$

Có $\begin{cases} SC \perp MN(gt) \\ SC \perp BM(do(2)) \\ MN, BM \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BMN) \Rightarrow SC \perp BN$

d). Theo câu b) $SB \perp (CIK)$ mà $SB \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (CIK)$

Theo câu c) $SC \perp (BMN)$ mà $SC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (BMN)$

e). Ta có : $\begin{cases} (CIK) \cap (BMN) = HG \\ (CIK) \perp (SBC) \\ (BMN) \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow HG \perp (SBC).$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy ABCD .

a). Chứng minh (SAC)$\perp$(SBD).

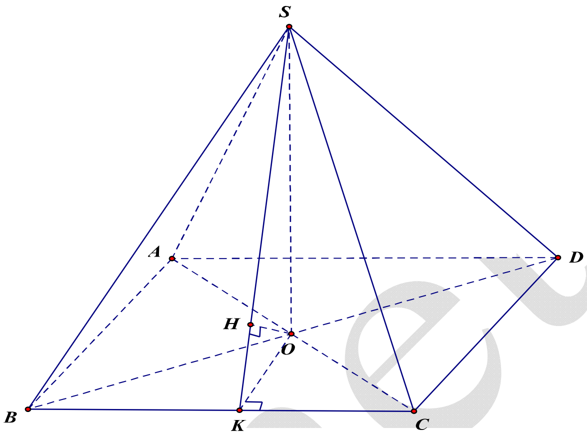
b). Từ O kẻ OK$\perp$BC. Chứng minh BC$\perp$(SOK).

c). Chứng minh (SBC)$\perp$(SOK).

d). Kẻ OH$\perp$SK tại H. Chứng minh OH$\perp$(SBC).

LỜI GIẢI

a). Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).



Ta có :

$$\begin{cases}(SAC)\cap(SBD)=SO\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SBD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SO\perp(ABCD).$$

Có $\begin{cases}AC\perp BD(ABCD\ \text{hình thoi})\\AC\perp SO(\text{vì } SO\perp(ABCD))\\BD,SO\subset(SBD)\end{cases}$

$\Rightarrow AC\perp(SBD)$ mà $AC\subset(SAC)\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$.

b). Chứng minh BC $\perp$ (SOK).

$$\begin{cases}BC\perp OK(gt)\ ,\ BC\perp SO(SO\perp(ABCD))\\OK,SO\subset(SOK)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOK).$$

c). Chứng minh (SBC) $\perp$ (SOK). vì $\begin{cases}BC\perp(SOK)\\BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\perp(SOK)$

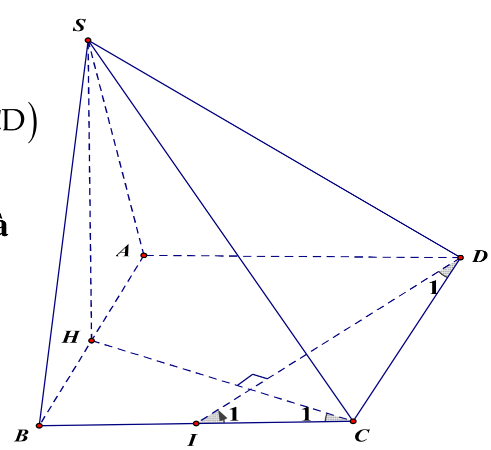
d). Chứng minh OH $\perp$ (SBC).

$$\begin{cases}OH\perp SK(gt)\ ,\ OH\perp BC(BC\perp(SOK))\\SK,BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow OH\perp(SBC)$$

Câu 7: Cho hình vuông ABCD. Gọi S là điểm trong không gian sao cho SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABCD) .Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC.
a). Chứng minh (SAB) $\perp$ (SAD) và (SAB) $\perp$ (SBC).
b). Chứng minh (SHC) $\perp$ (SDI).

LỜI GIẢI

Vì tam giác SAB đều nên $SH\perp AB$.



Có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABCD)=AB\\(SAB)\perp(ABCD)\\SH\subset(SAB)\ ,\ SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

a). Chứng minh (SAB) $\perp$ (SAD) và (SAB) $\perp$ (SBC).

$$\begin{cases}AD\perp AB(gt)\\AD\perp SH(SH\perp(ABCD))\Rightarrow AD\perp(SAB),\\AB,SH\subset(SAB)\end{cases}$$

mà $AD\subset(SAD)\Rightarrow(SAD)\perp(SAB)$

Chứng minh hoàn toàn tương tự , ta chứng minh được $(SBC)\perp(SAB)$.

b). Chứng minh (SHC) $\perp$ (SDI).

Có $\Delta BCH=\Delta CDI(c.g.c)\Rightarrow C_1=D_1$, mà $D_1+I_1=90^0\Rightarrow C_1+I_1=90^0$.

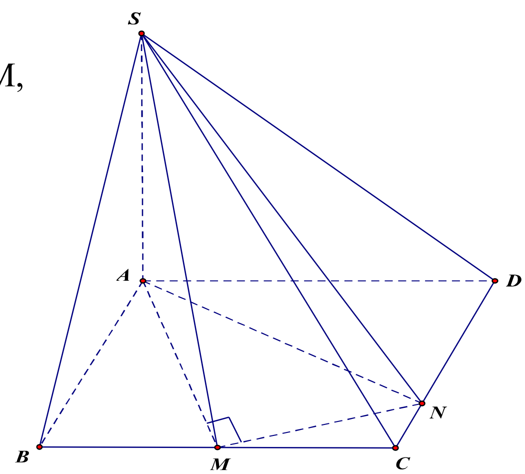
Vậy $HC\perp DI$

Có $\begin{cases} DI\perp CH \\ DI\perp SH\left(SH\perp(ABCD)\right) \\ CH,SH\subset(SHC) \end{cases}\Rightarrow DI\perp(SHC)$,

mà $DI\subset(SDI)\Rightarrow(SDI)\perp(SHC)$

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ đáy. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho BM = $\frac{a}{2}$, $DN=\frac{3a}{4}$.
Chứng minh (SAM) $\perp$ (SMN).

LỜI GIẢI



Pitago cho các tam giác vuông ABM, CMN, ADN . Ta có:

$$\left.\begin{aligned} AM^2&=AB^2+BM^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4} \\ MN^2&=CM^2+CN^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2=\frac{5a^2}{16} \\ AN^2&=AD^2+DN^2=a^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2=\frac{25a^2}{16} \end{aligned}\right\}$$

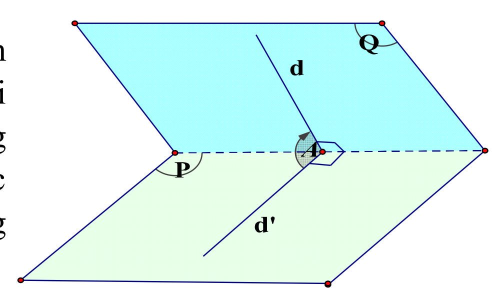
$\Rightarrow AM^2+MN^2=AN^2$.

Theo định lý đảo Pitago thì ΔAMN vuông tại M. . Suy ra $MN\perp AM$.

$\begin{cases} MN\perp AM \\ MN\perp SA \end{cases}\Rightarrow MN\perp mp(SAM)$. Mà $MN\subset mp(SMN)\Rightarrow(SAM)\perp(SMN)$.

GOÙC GIÖÕA HAI MAËT PHAÚNG

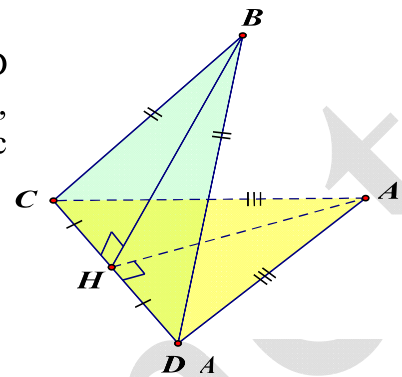
PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



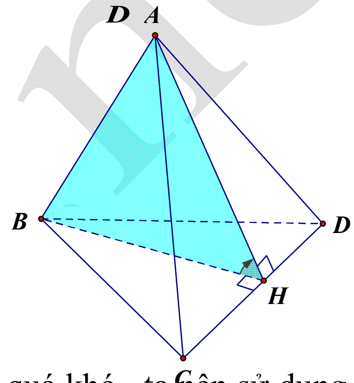
Để tìm góc giữa hai mặt phẳng , đầu tiên tìm giao tuyến của hai mặt phẳng . Sau đó tìm hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng vừa tìm .

Những trường hợp đặc biệt đề hay ra :

Trường hợp 1 : Hai tam giác cân ACD và BCD có chung cạnh đáy CD . Gọi H trung điểm của CD , thì góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 2 : Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau có chung cạnh CD . Dựng $AH \perp CD \Rightarrow BH \perp CD$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AHB}$.



Trường hợp 3 : Khi xác định góc giữa hai mặt phẳng quá khó , ta nên sử dụng công thức sau :

$$\sin\varphi = \frac{d\left(A, mp\left(Q\right)\right)}{d\left(A, a\right)}$$

Với φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). A là một điểm thuộc mặt phẳng (P) và a là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Trường hợp 4 : Có thể tìm góc giữa hai mặt phẳng bằng công thức $S' = S.\cos\varphi$

Trường hợp 5 : Tìm hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) . Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa d và d' .

Trường hợp 6 : CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA MẶT PHẲNG BÊN VÀ MẶT PHẲNG ĐÁY

BƯỚC 1: XÁC DỊNH GIAO TUYẾN d của mặt bên và mặt đáy.

BƯỚC 2 : TỪ HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC CỦA ĐỈNH , DỰNG $AH \perp d$.

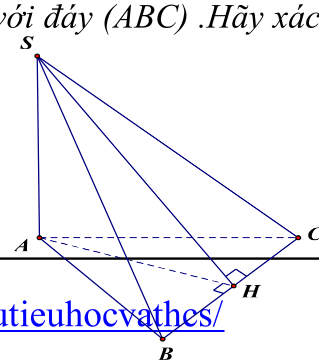
BƯỚC 3 : GÓC CẦN TÌM LÀ GÓC $\widehat{SHA}$.

Với S là đỉnh , A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ điển hình : *Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC) .Hãy xác định góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC).*

Ta có BC là giao tuyến của mp(SBC) và (ABC).

Từ hình chiếu của đỉnh là điểm A , dựng $AH \perp BC$.



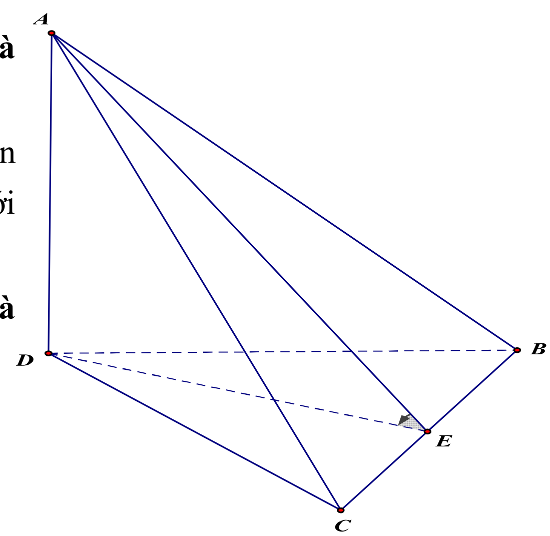
Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Kết luận góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SHA}$.

Câu 1: Cho tứ diện ABCD có AD ⊥ (BCD) và AB = 3a. Biết BCD là tam giác đều cạnh 2a. Tính góc giữa hai mặt phẳng :

a). (ACD) và (BCD). b). (ABC) và (DBC)

LỜI GIẢI



a). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).

Vì AD vuông góc với mặt phẳng (BCD) nên hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) vuông góc với nhau , suy ra góc giữa chúng bằng 90^0 .

b). Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Dựng $DE \perp BC$ tại E , ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp DE \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp mp(SBC) \Rightarrow BC \perp AE$.

Hai mặt phẳng (ABC) và (BCD) có BC là giao tuyến và hai đường thẳng DE , AE lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến BC . Nên góc giữa (ABC) và (DBC) là góc giữa DE và AE chính là góc $\widehat{AED}$.

Tam giác BCD đều nên có $DE = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

ΔABD vuông tại D có $AD = \sqrt{AB^2 - DB^2} = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔADE vuông tại D có

$$\tan \widehat{AED} = \frac{AD}{DE} = \frac{a\sqrt{5}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \widehat{AED} = \arctan\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right).$$

Câu 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy ABCD , $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau :

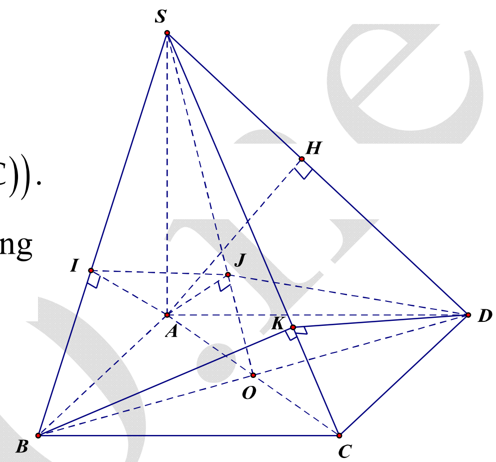
a). (SAB) và (SBC) b). (SAD) và (SCD) c). (SAB) và (SCD)

d). (SBC) và (SAD) e). (SBD) và (ABCD) f). (SBD) và (SAB)

g). (SBC) và (ABCD) h). (SCD) và (ABCD) i). (SBD) và (SBC)
k). (SBC) và (SCD)

LỜI GIẢI

a). Góc giữa (SAB) và (SBC)



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \left(BC \subset (SBC)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAB) bằng 90^0.

b). Góc giữa (SAD) và (SCD)

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \left(CD \subset (SCD)\right)$.

Vậy góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng (SAD) bằng 90^0.

c). Góc giữa (SAB) và (SCD) Dựng $AH \perp SD (H \in SD)$.

Ta có $AH \perp SD$ vµ $AH \perp CD \left(\text{v× } CD \perp (SAD)\right)$, tõ ®ã $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (2)

Ngoài ra ta có $AD \perp (SAB)$. Sử dụng cách xác định góc trường hợp 5 , thì góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng AH và AD chính là góc HAD.

Ta có $DAH = DSA$ (vì cùng phụ với góc SAH).

$\tan DSA = \frac{AD}{AS} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow DSA = 30^0$.

Kết luận $\left((SAB),(SCD)\right) = DAH = 30^0$.

d). Góc giữa (SBC) và (SAD)

Dựng $AI \perp SB (I \in SB)$. Ta có

$AI \perp SB$ vµ $AI \perp CB \left(\text{v× } CB \perp (SAB)\right)$, tõ ®ã $\Rightarrow AI \perp (SBC)$