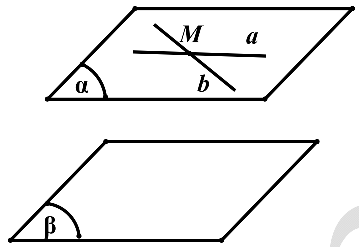
HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

PHẦN I- LÝ THUYẾT

1. **Định nghĩa:** $\left(\alpha\right)//\left(\beta\right) \Leftrightarrow \left(\alpha\right)\cap\left(\beta\right)=\varnothing$

2. **Định lý, hệ quả nói về cách chứng minh 2 mặtphẳng song song:**

   i) Địnhlý: $\begin{cases}\left(\alpha\right)\supset a,\ b\\ a\cap b=M\\ a//\left(\beta\right),\ b//\left(\beta\right)\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha\right)//\left(\beta\right)$



   ii) Hệquả: $\begin{cases}\left(\alpha\right)//\left(\gamma\right)\\ \left(\beta\right)//\left(\gamma\right)\\ \left(\alpha\right)\neq\left(\beta\right)\end{cases}\Rightarrow\left(\alpha\right)//\left(\beta\right)$

3. **Hệ quả nói về cách chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng:**

   i. $\begin{cases}\left(\alpha\right)//\left(\beta\right)\\ a\subset\left(\alpha\right)\end{cases}\Rightarrow a//\left(\beta\right)$

   ii. $\begin{cases}AB//\left(\alpha\right)\\ AC//\left(\alpha\right)\\ AB\cap AC=A\end{cases}\Rightarrow BC//\left(\alpha\right)$

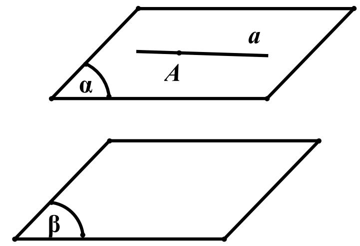
4. **Định lý nói về cách chứng minh 2 đường thẳng song song:** $\begin{cases}\left(\alpha\right)//\left(\beta\right)\\ \left(\gamma\right)\cap\left(\alpha\right)=a\\ \left(\gamma\right)\cap\left(\beta\right)=b\end{cases}\Rightarrow a//b$.

5. **Các định lý, hệ quả khác:**

   i. $\begin{cases}\left(\alpha\right)//\left(\beta\right)\\ d\cap\left(\alpha\right)=A,\ d\cap\left(\beta\right)=B\\ d'\cap\left(\alpha\right)=A',\ d'\cap\left(\beta\right)=B'\\ d//d'\end{cases}\Rightarrow AB=A'B'$

   ii. $A\notin\left(\alpha\right)\Rightarrow\exists!\left(\beta\right):\begin{cases}A\in\left(\beta\right)\\ \left(\beta\right)//\left(\alpha\right)\end{cases}$

   iii. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng $\left(\alpha\right)$. Mọi đường thẳng đi qua A và song song với $\left(\alpha\right)$ đều nằm trong mặt phẳng qua A và song song với $\left(\alpha\right)$.

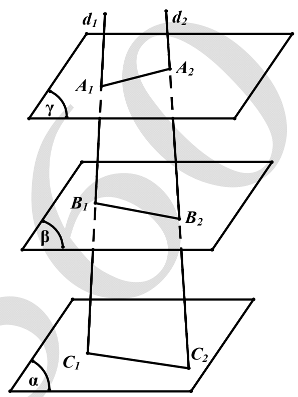


Vậy: $\begin{cases} A \notin (\beta) \\ A \in a,\ a//(\beta) \\ A \in (\alpha),\ (\alpha)//(\beta) \end{cases} \Rightarrow a \subset (\alpha)$

6. **Địnhlí Ta-lét (Thales)**

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\begin{cases} (\alpha)//(\beta)//(\chi) \\ d_1 \cap (\alpha) = A_1, d_1 \cap (\beta) = B_1, d_1 \cap (\chi) = C_1 \\ d_2 \cap (\alpha) = A_2, d_2 \cap (\beta) = B_2, d_2 \cap (\chi) = C_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}.$$



7. **Định lí Ta-lét (Thales) đảo**

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 saocho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

8. **Hình lăng trụ và hình hộp**

a. Định nghĩa hình lăng trụ:

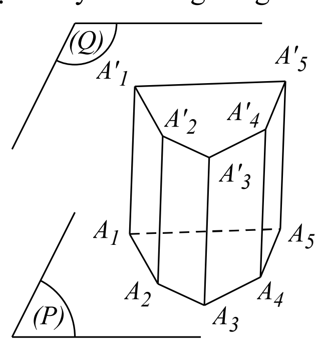
Hình lăng trụ là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai cạnh đáy đều song song với nhau.

Trong đó:

- Các mặt khác với hai đáy gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.
- Cạnh chung của hai mặt bên gọi là cạnh bên của hình lăng trụ.
- Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác …

Từ định nghĩa của hình lăng trụ, ta lần lượt suy ra các tính chất sau:

a. Các cạnh bên song song và bằng nhau.



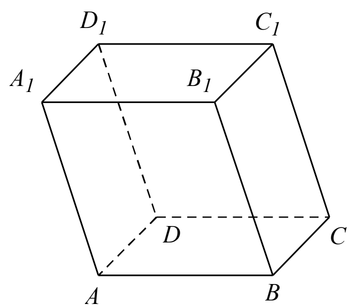
b. Các mặt bên và các mặt chéo là những hình bình hành.

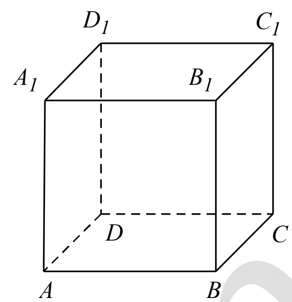
c. Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

b. Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là hình hộp.

a. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình chữ nhật gọi là hình hộp chữ nhật.

b. Hình hộp có tất cả các mặt bên và các mặt đáy đều là hình vuông gọi là hình lập phương.

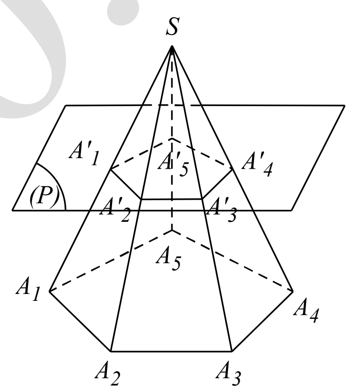




Chú ý: Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

9. Hình chóp cụt

Định nghĩa: Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ theo thứ tự tại $A_1', A_2', ..., A_n'$. Hình tạo bởi thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các mặt bên $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', ..., A_nA_1A_1'A'_n$ gọi là một hình chóp cụt.



Trong đó:

- Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.
- Các mặt còn lại gọi là các mặt bên của hình chóp cụt.
- Cạnh chung của hai mặt bên kề nhau như $A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n'$ gọi là cạnh bên của hình chóp cụt.

Tùy theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,… ta có hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chụp cụt ngũ giác,…

Tính chất: Với hình chóp cụt, ta có các tính chất sau:

1. Hai đáy của hình chóp cụt là hai đa giác đồng dạng.
2. Các mặt bên của hình chóp cụt là các hình thang.
3. Các cạnh bên của hình chóp cụt đồng quy tại một điểm.

10. ĐịnhlíTa-lét(Thales) đảo

Cho hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau và các điểm A_1, B_1, C_1 trên d_1, các điểm A_2, B_2, C_2 trên d_2 sao cho $\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{A_2B_2}{B_2C_2}$. Lúc đó các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 cùng song song với một mặt phẳng.

PHẦN II- CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

1. Dạng 1: Chứng minh 2 mặt phẳng song song

Phương pháp giải tự luận: Dựa vào định lý, hệ quả sau:

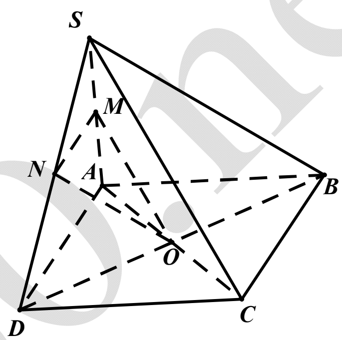
i. $\begin{cases}(\alpha)\supset a,\ b\\ a\cap b=I\\ a//(\beta),\ b//(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$ **ii.** $\begin{cases}(\alpha)//(\gamma)\\ (\beta)//(\gamma)\\ (\alpha)\neq(\beta)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)//(\beta)$

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Lời giải:

Ta có M,O lần lượt là trung điểm của SA,AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC ứng với cạnh SC do đó $OM\parallel SC$.

Vậy $\begin{cases}OM\parallel SC\\ SC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow OM\parallel(SBC)\ (1)$.



Tương tự, Ta có N,O lần lượt là trung điểm của SD,BD nên ON là đường trung bình của tam giác SBD ứng với cạnh SB do đó $OM//SB$.

Vậy $\begin{cases}ON\parallel SB\\ SB\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow OM\parallel(SBC)\ (2)$. Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}OM\parallel(SBC)\\ ON\parallel(SBC)\\ OM\cap ON=O\end{cases}\Rightarrow(OMN)\parallel(SBC)$.

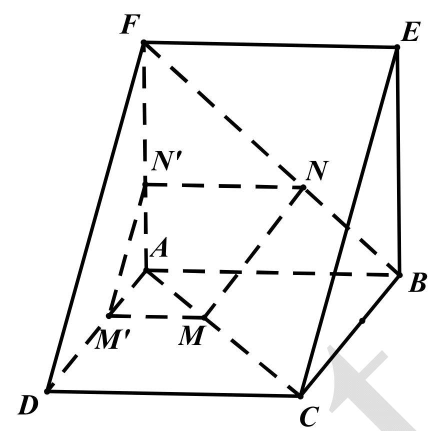
Ví dụ 2. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF)\parallel(BCE)$.

b) $(DEF)\parallel(MM'N'N)$.

Lời giải:

a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$



Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hìnhvuông nên $AC = BF \quad (1)$.

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC} \quad (2)$

$NN' \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} \quad (3)$

Từ $(1),(2)$ và (3) ta được $\dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$

$\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$.

2. Dạng 2: Chứng minh đường thẳng song song với mặtphẳng

Phương pháp giải tự luận, dựa vào các hệ quả sau:

1. $\begin{cases} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a // (\beta)$

2. $\begin{cases} AB // (\alpha) \\ AC // (\alpha) \\ AB \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow BC // (\alpha)$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

Ví dụ 1: Cho hình thang $ABCD$ có $AB // CD$ và $S \notin (ABCD)$. Trên SA, BD lấy hai điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Kẻ $NI // AB \ (I \in AD)$. Chứng minh $MN // (SCD)$.

Lời giải:

Ta có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{1}{3}$. Do $NI // AB$ nên $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{AM}{AS}=\frac{AI}{AD}\Rightarrow MI//SD\Rightarrow MI//(SCD)$

Do $NI//SD$ ta suy ra $NI//CD$.

Vậy $(MNI)//(SCD)\Rightarrow MN//(SCD)$.

3. Dạng 3: Chứng minh 2 đường thẳng song song

Phươngphápgiảitự luận.

Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song

$$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\gamma)//(\alpha)=a\Rightarrow a//b\\(\gamma)//(\beta)=b\end{cases}$$

và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

4. Dạng 4: Bài toánliên quan đến tỷ lệ độ dài

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý Talet (thuận), hệ quả ở bài hai mặt phẳng song song:

1. $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\d\cap(\alpha)=A,\ d\cap(\beta)=B\\d'\cap(\alpha)=A',\ d'\cap(\beta)=B'\\d//d'\end{cases}\Rightarrow AB=A'B'$

2. $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)//(\gamma)\\d\cap(\alpha)=A,\ d\cap(\beta)=B,\ d\cap(\gamma)=C\\d'\cap(\alpha)=A',\ d'\cap(\beta)=B',\ d'\cap(\gamma)=C'\end{cases}\Rightarrow\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$

và địnhlý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

B) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

A. $\frac{k}{k+1}$ **B.** $\frac{2k}{k+1}$ **C.** $\frac{1}{k}$ **D.** $\frac{1}{k+1}$

<u>Lời giải:</u>

a) Do $\frac{AM}{MB}=\frac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales thì các đường thẳng MN,AC,BD cùng song song với một mặt phẳng (β).Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AC và song song với BD thì (α) cố định và $(\alpha)\parallel(\beta)$ suy ra MN luôn song song với (α) cố định.

b) Xét trường hợp $\frac{AP}{PC}=k$, lúc này $MP\parallel BC$ nên $BC\parallel(MNP)$.

Ta có :

$$\begin{cases} N \in (MNP) \cap (BCD) \\ BC \parallel (MNP) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (MNP) = NQ \parallel BC, Q \in BD.$$

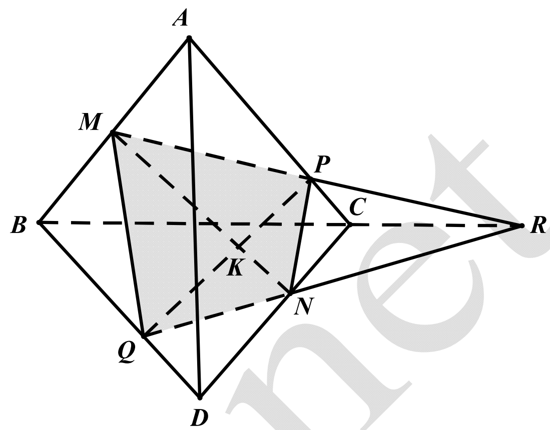
Thiết diện là tứ giác $MPNQ$ .Xét trường hợp $\dfrac{AP}{PC} \neq k$

Trong (ABC) gọi $R = BC \cap MP$

Trong (BCD) gọi $Q = NR \cap BD$ thì thiết diện là tứ giác $MPNQ$.

Gọi $K = MN \cap PQ$

Ta có $\dfrac{S_{MNP}}{S_{MPNQ}} = \dfrac{PK}{PQ}$.



Do $\dfrac{AM}{NB} = \dfrac{CN}{ND}$ nên theo định lí Thales đảo thì AC, NM, BD lần lượt thuộc ba mặt phẳng song song với nhau và đường thẳng PQ cắt ba mặt phẳng này tương ứng tại P, K, Q nên áp dụng định lí Thales ta được

$$\frac{PK}{KQ} = \frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND} = k \Rightarrow \frac{PK}{PQ} = \frac{PK}{PK + KQ} = \frac{\frac{PK}{KQ}}{\frac{PK}{KQ} + 1} = \frac{k}{k+1}.$$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

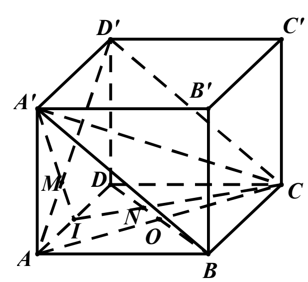
b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \parallel A'C$.

<u>Lời giải:</u>

a) Gọi (P) là mặt phẳng qua AD và song song với $(A'D'CB)$. Gọi (Q) là mặt phẳng qua M và song song với $(A'D'CB)$. Giả sử (Q) cắt BD tại điểm N'.

Theo định lí Thales ta có

$\dfrac{AM}{AD'} = \dfrac{DN'}{DB}$ (1)



Vì các mặt của hình hộp là hình vuuong cạnh a nên $AD' = DB = a\sqrt{2}$.

Từ (1) ta có $AM = DN'$, mà $DN = AM \Rightarrow DN' = DN \Rightarrow N' \equiv N \Rightarrow MN \subset (Q)$.

Mà $\begin{cases}(Q)\parallel(A'D'CB)\\ MN\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow MN\parallel(A'D'CB)$.

Vậy MN luôn song song với mặt phẳng cố định $(A'D'CB)$.

b) Gọi $O=AC\cap BD$. Ta có

$DN=x=\frac{a\sqrt{2}}{3}, DO=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow DN=\frac{2}{3}DO$ suy ra N là trọng tâm của tam giác ACD.

Tương tự M là trọng tâm của tam giác $A'AD$.

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\frac{IN}{IC}=\frac{1}{3},\frac{IM}{IA'}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IN}{IC}=\frac{IM}{IA'}\Rightarrow MN\parallel A'C$.

5. Dạng 5: Xácđịnhgiaotuyến

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\gamma)//(\alpha)=a\Rightarrow a//b\\(\gamma)//(\beta)=b\end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

6. Dạng 6: Xác định thiết diện

Phương pháp giải tự luận.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\(\gamma)//(\alpha)=a\Rightarrow a//b\\(\gamma)//(\beta)=b\end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD) .Thiết diện là hình gì?

A.Tam giác **B.**Hình thang **C.**Hình bình hành **D.**Tứ giác

Lời giải:

Ta có $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases}$

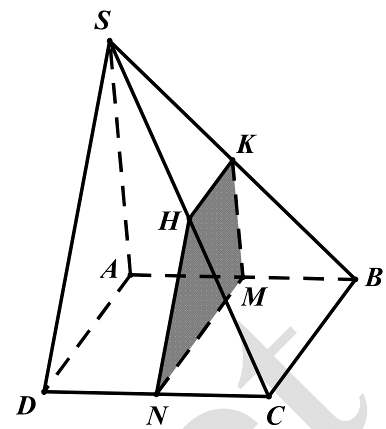
$\Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MK \parallel SA, K \in SB$.

Tương tự $\begin{cases} N \in (SCD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel (SAD) \\ (SCD) \cap (SAD) = SD \end{cases}$

$\Rightarrow (SCD) \cap (\alpha) = NH \parallel SD, H \in SC$.

Dễ thấy $HK = (\alpha) \cap (SBC)$. Thiết diện là tứ giác $MNHK$

Ba mặt phẳng $(ABCD), (SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel HK$. Vậy thiết diện là một hình thang .



BÀI KIỂM TRA

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Câu 4. Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF.