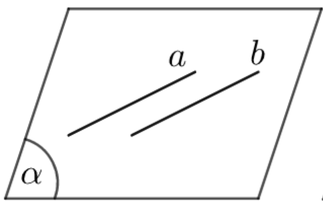
HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

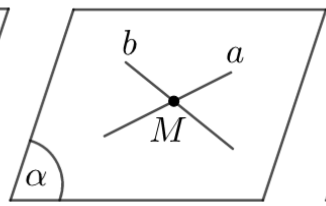
PHẦN 1 – LÝ THUYẾT

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

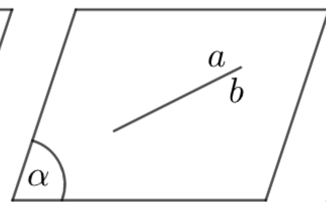
Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong các trường hợp sau:



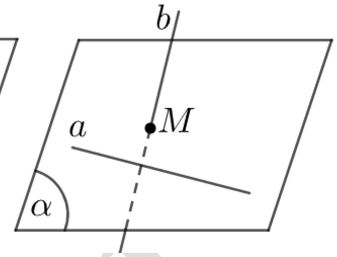
$a // b$



$a \cap b = M$



$a \equiv b$



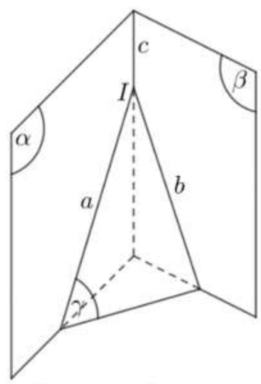
a và b chéo nhau

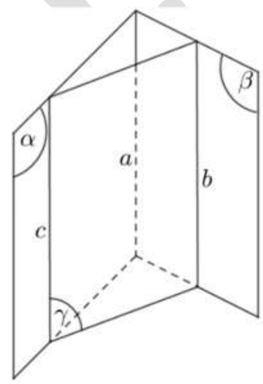
2. Tính chất

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 1: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.





Hệ quả *(của định lý 1)***:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của hai mặt phẳng đó (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).

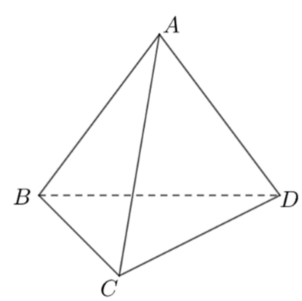
PHẦN 2 – CÁC DẠNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: *Chứng minh hai đường thẳng chéo nhau*

Phương pháp giải: Để chứng minh hai đường thẳng a và b chéo nhau, ta thường dùng phương pháp phản chứng, nghĩa là giả sử a và b không chéo nhau, rồi tìm ra điều mâu thuẫn so với giả thiết bài toán.

Ví dụ điển hình

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng AB và CD là hai đường thẳng chéo nhau.



Hướng dẫn giải

Giả sử AB và CD không chéo nhau, nghĩa là hai đường thẳng này đồng phẳng.

Khi đó AB và CD có thể song song với nhau, cắt nhau tại một điểm hoặc trùng nhau (vô lý).

Vậy AB và CD chéo nhau.

Dạng 2: *Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng a và b song song với nhau.*

Phương pháp giải: Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng, từ đó kết luận giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng Δ, với $M \in \Delta$ và $\Delta // a // b$.

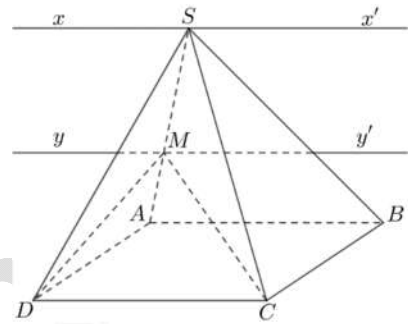
Ví dụ điển hình

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC).

b) (MCD) và (SAB), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = xx'$, với $S \in xx'$ và $xx' // AB // CD$.

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (MCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (MCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

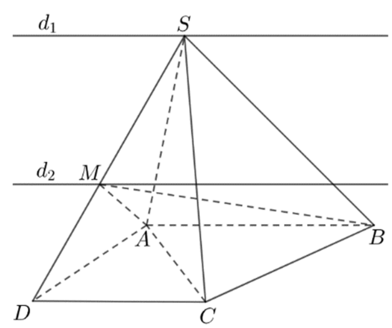
$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = yy'$, với $yy' // AB // CD$ và $M \in yy'$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$.

b) $d_2 = (SCD) \cap (MAB)$. Từ đó chứng minh $d_1 // d_2$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = d_1$, với $S \in d_1$ và $d_1 // AB // CD$ (1).

b) Ta có: $\begin{cases} M \in (MAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD \subset (SCD) \\ AB // CD \end{cases}$.

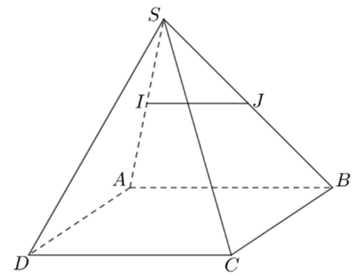
$\Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = d_2$, với $M \in d_2$ và $d_2 // AB // CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $d_1 // d_2$.

Dạng 3: *Chứng minh hai đường thẳng a và b song song với nhau.*

Phương pháp giải: Dựa vào hình học phẳng: Định lý Ta-lét đảo, đường trung bình...; hoặc đưa về dạng $a // c$ và $b // c$, từ đó suy ra $a // b$.

Ví dụ điển hình:



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng $IJ//AB$, từ đó suy ra $IJ//CD$.

Hướng dẫn giải

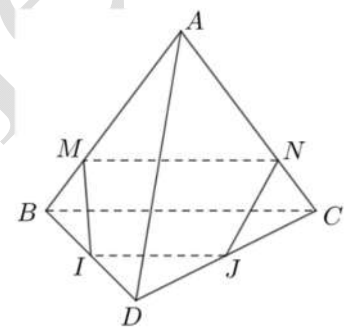
Vì I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB. Từ đó suy ra $IJ//AB$.
Lại có $AB//CD$ nên từ đó ta có $IJ//CD$ (vì cùng song song với đường thẳng AB).

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng $MN//BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì. Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải



a) Ta có: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, từ đó suy ra $MN//BC$ (1) (Định lý Ta-lét đảo).

b) Vì I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD nên IJ là đường trung bình của tam giác BCD. Từ đó suy ra $IJ//BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN//IJ$. Vậy tứ giác $MNJI$ là hình thang.

Để $MNJI$ là hình bình hành thì $MI//NJ$. Lại có ba mặt phẳng $(MNJI)$, (ABD), (ACD) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MI, NJ, AD nên theo định lý 1 ta có $MI//AD//NJ$. Từ đó suy ra điều kiện để hình thang $MNJI$ trở thành hình bình hành là M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

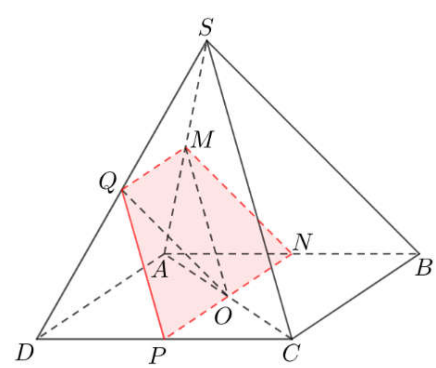
Dạng 4: *Thiết diện chứa một điểm M và song song với hai đường thẳng a và b chéo nhau.*

Phương pháp giải: Qua điểm M ta lần lượt kẻ các đường thẳng $d_1//a$ và $d_2//b$. Sau đó tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng (d_1, d_2) với các mặt của hình chóp.

Ví dụ điển hình:

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SA. Tìm thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp $S.ABCD$, biết (P) là mặt phẳng qua điểm M và song song với SC, AD.

Hướng dẫn giải



Qua M kẻ các đường thẳng $MQ//AD$ $(Q \in SD)$ và $MO//SC$ $(O \in AC)$.

Ta có: SC và AD lần lượt song song với mặt phẳng (OMQ) nên $(OMQ) \equiv (P)$.

Dễ dàng tìm được $(OMQ) \cap (ABCD) = NP$, với $NP//MQ//BC$ và $O \in NP$. Từ đó ta có:

$\begin{cases}(OMQ)\cap(SAD)=MQ\\(OMQ)\cap(SCD)=QP\\(OMQ)\cap(ABCD)=PN\\(OMQ)\cap(SAB)=NM\end{cases}$, vậy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là hình thang $MNPQ$.

Dạng 5: *Thiết diện chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng khác.*

Phương pháp giải:

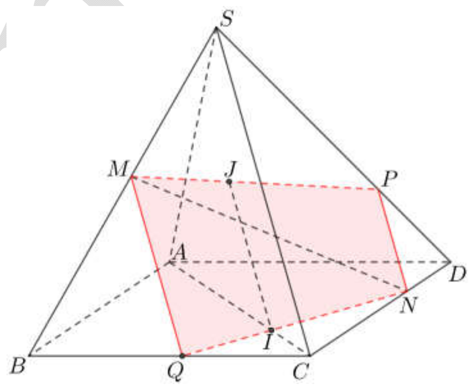
Ví dụ điển hình:

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên SB, CD và (P) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng (SCD), (SBC), (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P).

Hướng dẫn giải



a) Qua N kẻ $NP//SC$ $(P\in SD)$.

Ta có: $\begin{cases}NP//SC\\NP\subset(MNP)\Rightarrow SC//(MNP)\\SC\not\subset(MNP)\end{cases}$.

Từ đó ta có: (MNP) là mặt phẳng qua MN và song song với SC.

Vậy $(P)\equiv(MNP)$.

Ta có: $(P)\cap(SCD)=NP$.

Ta có: $\begin{cases}M\in(MNP)\cap(SBC)\\NP\subset(MNP),\ SC\subset(SBC)\\NP//SC\end{cases}\Rightarrow(MNP)\cap(SBC)=MQ$, với $MQ//SC//NP$, $M\in MQ$ và $Q\in BC$.

Trong $(ABCD)$ gọi $I=QN\cap AC$.

Ta có: $\begin{cases}I\in(MNP)\cap(SAC)\\NP\subset(MNP),\ SC\subset(SAC)\\NP//SC\end{cases}\Rightarrow(MNP)\cap(SAC)=IJ$, với $IJ//SC//NP$, $I\in IJ$ và $J\in MP$.

b) Dễ thấy thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp là tứ giác $MPNQ$.

BÀI TẬP KIỂM TRA

Bài 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là các điểm thuộc đoạn thẳng AB, AC (I, J không trùng với hai đầu đoạn thẳng). Chứng minh rằng:

a) AB và CD chéo nhau, AC và BD chéo nhau.

b) IJ và lần lượt chéo nhau với các đường thẳng AD, BD, CD.

Bài 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD và CD. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (AMN) và (ABC).