

CHUYÊN ĐỀ
GÓC

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

1. Khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng :

a) Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng :

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến (Δ) được tính

$$\text{bởi công thức: } d(M, (\Delta)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Vị trí của hai điểm đối với đường thẳng.

Cho đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ và $M(x_M; y_M) \notin \Delta, N(x_N; y_N) \notin \Delta$. Khi đó:

$$- M, N \text{ cùng phía với } \Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0$$

$$- M, N \text{ khác phía với } \Delta \Leftrightarrow (ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0$$

Chú ý: Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng :

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

2. Góc giữa hai đường thẳng:

a) **Định nghĩa:** Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b , hay đơn giản là góc giữa a và b . Khi a song song hoặc trùng với b , ta quy ước góc giữa chúng bằng 0° .

b) Công thức xác định góc giữa hai đường thẳng.

Góc xác định hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và

$$\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ được xác định bởi công thức } \cos(\Delta_1; \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Câu 1: Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ được xác định theo công thức:

A. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$

B. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$

C. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$

D. $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \sqrt{\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{a^2 + b^2}}.$

Lời giải

Chọn C.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{n}_{\Delta_1}, \vec{n}_{\Delta_2}) \right| = \frac{|\vec{n}_{\Delta_1} \cdot \vec{n}_{\Delta_2}|}{|\vec{n}_{\Delta_1}| \cdot |\vec{n}_{\Delta_2}|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Câu 2: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : 10x + 5y - 1 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

- A. $\frac{3}{10}$. B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn C.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(2;1), \vec{n}_2(1;1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Câu 3: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{2} = 0$ và $\Delta_2: x - y = 0$.

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(1;2), \vec{n}_2(1;-1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Câu 4: Tìm cosin giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 3y - 10 = 0$ và $\Delta_2: 2x - 3y + 4 = 0$.

- A. $\frac{7}{13}$. B. $\frac{6}{13}$. C. $\sqrt{13}$. D. $\frac{5}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(2;3), \vec{n}_2(2;-3)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{5}{13}.$$

Câu 5: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x + 2\sqrt{3}y + \sqrt{5} = 0$ và $\Delta_2: y - \sqrt{6} = 0$

- A. 60° . B. 125° . C. 145° . D. 30° .

Lời giải

Chọn D.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(1;\sqrt{3}), \vec{n}_2(0;1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 30^\circ.$$

Câu 6: Tìm góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1: x + \sqrt{3}y = 0$ và $\Delta_2: x + 10 = 0$.

- A. 45° . B. 125° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải

Chọn D.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(1;\sqrt{3}), \vec{n}_2(1;0)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 60^\circ$$

Câu 7: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1: 2x - y - 10 = 0$ và $\Delta_2: x - 3y + 9 = 0$.

- A. 60° . B. 0° . C. 90° . D. 45° .

Lời giải

Chọn D.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(2; -1), \vec{n}_2(1; -3)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45^\circ$$

Câu 8: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 7 = 0$ và $\Delta_2 : 2x - 4y + 9 = 0$.

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A.

Véc tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n}_1(1; 2), \vec{n}_2(2; -4)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{5}$$

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x + 2y - 6 = 0$ và $\Delta_2 : x - 3y + 9 = 0$. Tính góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2

- A. 30° . B. 135° . C. 45° . D. 60° .

Lời giải

Chọn C.

$$(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{n}_{\Delta_1}, \vec{n}_{\Delta_2}) \right| = \frac{|\vec{n}_{\Delta_1} \cdot \vec{n}_{\Delta_2}|}{|\vec{n}_{\Delta_1}| |\vec{n}_{\Delta_2}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45^\circ$$

Câu 10: Cho hai đường thẳng $d_1 : x + 2y + 4 = 0; d_2 : 2x - y + 6 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải

Chọn D.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d_1 là $\vec{n}_1 = (1; 2)$.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng d_2 là $\vec{n}_2 = (2; -1)$.

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$.

Câu 11: Tìm góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : 6x - 5y + 15 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 10 - 6t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 là $\vec{n}_1 = (6; -5)$.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_2 là $\vec{n}_2 = (5; 6)$.

Ta có $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2$.

Câu 12: Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 : 3x + 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 15 + 12t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$.

- A. $\frac{56}{65}$. B. $\frac{63}{13}$. C. $\frac{6}{65}$. D. $\frac{33}{65}$.

Lời giải

Chọn D.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 là $\vec{n}_1 = (3; 4)$.

Vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_2 là $\vec{n}_2 = (5; -12)$.

Gọi φ là góc giữa $\Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{33}{65}$.

Câu 13: Cho đoạn thẳng AB với $A(1; 2)$, $B(-3; 4)$ và đường thẳng $d: 4x - 7y + m = 0$. Định m để d và đoạn thẳng AB có điểm chung.

A. $10 \leq m \leq 40$.

B. $m > 40$ hoặc $m < 10$.

C. $m > 40$.

D. $m < 10$.

Lời giải

Chọn A.

Đường thẳng d và đoạn thẳng AB có điểm chung $\Leftrightarrow A, B$ nằm về hai phía của đường thẳng d

$$\Leftrightarrow (4 - 14 + m)(-12 - 28 + m) \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq m \leq 40.$$

Câu 14: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi đường thẳng $\Delta: x + y = 0$ và trục hoành Ox ?

A. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0$; $x - (1 - \sqrt{2})y = 0$.

B. $(1 + \sqrt{2})x + y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.

C. $(1 + \sqrt{2})x - y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.

D. $x + (1 + \sqrt{2})y = 0$; $x + (1 - \sqrt{2})y = 0$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường phân giác $\Rightarrow d(M, \Delta) = d(M, Ox)$

$$\Rightarrow \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} = |y| \Rightarrow x + (1 \pm \sqrt{2})y = 0.$$

Câu 15: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$ và 2 điểm $A(1; 2)$, $B(-2; m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d .

A. $m < 13$.

B. $m \geq 13$.

C. $m > 13$.

D. $m = 13$.

Lời giải

Chọn A.

Phương trình tổng quát của đường thẳng $d: 3(x - 2) + 1(y - 1) = 0$ hay $d: 3x + y - 7 = 0$.

$$A, B \text{ cùng phía với } d \Leftrightarrow (3x_A + y_A - 7)(3x_B + y_B - 7) > 0 \Leftrightarrow -2(-13 + m) > 0 \Leftrightarrow m < 13$$

Câu 16: Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳng $\Delta_1: x + 2y - 3 = 0$ và $\Delta_2: 2x - y + 3 = 0$.

A. $3x + y = 0$ và $x - 3y = 0$.

B. $3x + y = 0$ và $x + 3y - 6 = 0$.

C. $3x + y = 0$ và $-x + 3y - 6 = 0$.

D. $3x + y + 6 = 0$ và $x - 3y - 6 = 0$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đường phân giác $\Rightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2)$

$$\Rightarrow \frac{|x + 2y - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow x + 2y - 3 = \pm(2x - y + 3) \Rightarrow \begin{cases} -x + 3y - 6 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$$

Câu 17: Cho hai đường thẳng $d_1: 2x - 4y - 3 = 0$; $d_2: 3x - y + 17 = 0$. Số đo góc giữa d_1 và d_2 là

A. $\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{2}$.

C. $-\frac{3\pi}{4}$.

D. $-\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d_1, d_2) = \frac{\pi}{4}.$$

Câu 18: Cho đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$ và 2 điểm $A(1;3), B(2;m)$. Định m để A và B nằm cùng phía đối với d .

A. $m < 0$.

B. $m > -\frac{1}{4}$.

C. $m > -1$.

D. $m = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

A, B nằm về hai phía của đường thẳng d

$$\Leftrightarrow (3+12-5)(6+4m-5) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}.$$

Câu 19: Cho ΔABC với $A(1;3), B(-2;4), C(-1;5)$ và đường thẳng $d: 2x - 3y + 6 = 0$. Đường thẳng d cắt cạnh nào của ΔABC ?

A. Cạnh AC .

B. Không cạnh nào.

C. Cạnh AB .

D. Cạnh BC .

Lời giải

Chọn B.

Thay điểm A vào phương trình đường thẳng d ta được -1

Thay điểm B vào phương trình đường thẳng d ta được -10

Thay điểm C vào phương trình đường thẳng d ta được -11

Suy ra điểm A và B nằm cùng phía đối với d nên d không cắt cạnh AB .

điểm A và C nằm cùng phía đối với d nên d không cắt cạnh AC

điểm C và B nằm cùng phía đối với d nên d không cắt cạnh BC .

Câu 20: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: x + y + 5 = 0$ và $\Delta_2: y = -10$. Góc giữa Δ_1 và Δ_2 là

A. 30° .

B. 45° .

C. $88^\circ 57' 52''$.

D. $1^\circ 13' 8''$.

Lời giải

Chọn B.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_1 là $\vec{n}_1 = (1;1)$.

Véc tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ_2 là $\vec{n}_2 = (0;1)$.

$$\text{Ta có } \cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 45^\circ$$

Câu 21: Cho tam giác ABC có $A(0;1), B(2;0), C(-2;-5)$. Tính diện tích S của tam giác ABC

A. $S = \frac{5}{2}$.

B. $S = 5$.

C. $S = 7$.

D. $S = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $AB = \sqrt{5}$; $AC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$; $BC = \sqrt{41}$.

$$\Rightarrow p = \frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{10} + \sqrt{41}}{2}$$

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = 7.$$

- Câu 22:** Cho đoạn thẳng AB với $A(1;2)$, $B(-3;4)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = m + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$. Định m để d cắt đoạn thẳng AB .
- A. $m < 3$. B. $m = 3$. C. $m > 3$. D. Không có m nào.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình tổng quát của đường thẳng $d: x + 2y - m - 2 = 0$

Đường thẳng d và đoạn thẳng AB có điểm chung

$$\Leftrightarrow A, B \text{ nằm về hai phía của đường thẳng } d \Leftrightarrow (1 + 4 - m - 2)(-3 + 8 - m - 2) < 0.$$

$$\Leftrightarrow (3 - m)(3 - m) < 0 \text{ vô nghiệm.}$$

- Câu 23:** Đường thẳng $ax + by - 3 = 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$ đi qua điểm $M(1;1)$ và tạo với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 7 = 0$ một góc 45° . Khi đó $a - b$ bằng
- A. 6. B. -4. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn D.

Gọi đường thẳng d có véctơ pháp tuyến $\vec{n}_d = (a; b)$ với $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ta có } (\Delta, d) = 45^\circ \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_\Delta, \vec{n}_d) \right| = \cos 45^\circ \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_\Delta \cdot \vec{n}_d|}{|\vec{n}_\Delta| \cdot |\vec{n}_d|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a - b|}{\sqrt{10}\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |3a - b| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow 2a^2 - 3ab - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = -\frac{1}{2}b \end{cases}$$

Với $a = 2b$ chọn $B = 1$; $A = 2 \Rightarrow d: 2x + y - 3 = 0$.

Với $a = -\frac{1}{2}b$ chọn $B = -2$; $A = 1 \Rightarrow d: x - 2y + 1 = 0$.

- Câu 24:** Cho $d: 3x - y = 0$ và $d': mx + y - 1 = 0$. Tìm m để $\cos(d, d') = \frac{1}{\sqrt{10}}$
- A. $m = 0$. B. $m = \frac{4}{3}$ hoặc $m = 0$. C. $m = \frac{3}{4}$ hoặc $m = 0$. D. $m = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{d} = (3; -1)$.

Véctơ pháp tuyến của đường thẳng d' là $\vec{d}' = (m; 1)$.

$$\text{Ta có } \cos(d, d') = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \left| \cos(\vec{n}_d, \vec{n}_{d'}) \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_d \cdot \vec{n}_{d'}|}{|\vec{n}_d| \cdot |\vec{n}_{d'}|} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3m - 1|}{\sqrt{10}\sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow |3m - 1| = \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow 8m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{4} \end{cases}$$

- Câu 25:** Cho tam giác ABC có $A(0;1)$, $B(-2;0)$, $C(2;5)$. Tính diện tích S của tam giác ABC