CHUYÊN ĐỀ
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

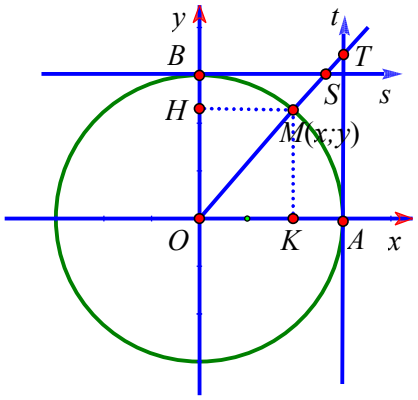
§ 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giá trị lượng giác của góc(cung) lượng giác.

a) Đường tròn lượng giác: Đường tròn lượng giác là đường tròn đơn vị, định hướng và trên đó chọn điểm A làm gốc.

b) Tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác.



Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $\left(OA,OM\right)=\alpha$ gọi là điểm xác định bởi số α (hay bởi cung α, hay bởi góc α). Điểm M còn được gọi là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung(góc) lượng giác có số đo α.

Nhận xét: Ứng với mỗi số thực α có một điểm nằm trên đường tròn lượng(điểm xác định bởi số đó) tương tự như trên trục số. Tuy nhiên, mỗi điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số thực. Các số thực có dạng là $\alpha+k2\pi,k\in Z$.

d) Giá trị lượng giác sin, côsin, tang và côtang: Cho hệ trục tọa độ gắn với đường tròn lượng giác. Với mỗi góc lượng giác $\left(Ou,Ov\right)$ có số đo α, xác định điểm $M\left(x;y\right)$ trên đường tròn lượng giác sao cho sđ... Khi đó ta định nghĩa

$\cos\alpha=x,\ \sin\alpha=y$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\alpha\neq k\pi\right)$

Ý nghĩa hình học: Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox,Oy. Vẽ trục số At gốc A cùng hướng với trục Oy và vẽ trục số Bs gốc B cùng hướng với trục Ox, gọi T,S lần lượt là giao điểm của đường thẳng OM cắt với các trục sô At,Bs. Khi đó ta có:

$\sin\alpha=\overline{OH},\ \cos\alpha=\overline{OK},\tan\alpha=\overline{AT},\cot\alpha=\overline{BS}$

e) Tính chất:

- $\sin\alpha,\cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α và $-1\le\sin\alpha\le1,-1\le\cos\alpha\le1$.
- $\tan\alpha$ được xác định khi $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha\neq k\pi$
- $\sin\alpha=\sin\left(\alpha+k2\pi\right),\cos\alpha=\cos\left(\alpha+k2\pi\right)$

  $\tan\alpha=\tan\left(\alpha+k\pi\right),\cot\alpha=\cot\left(\alpha+k\pi\right)$

f) Dấu của các giá trị lượng giác:

Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm M nằm trên đường tròn lượng giác.

Bảng xét dấu

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
cosα	+	–	–	+
sinα	+	+	–	–

tanα	+	–	+	–
cotα	+	–	+	–

g) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	–1	0	||	0
$\cot\alpha$	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	||	0	||

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

$$1)\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$2)\ 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi)$$

$$3)\ 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha\neq k\pi)$$

$$4)\ \tan\alpha.\cot\alpha=1\ (\alpha\neq\frac{k\pi}{2})$$

3. Giá trị lượng giác của góc(cung) có liên quan đặc biệt.

Góc đối nhau (α và $-\alpha$)	**Góc bù nhau(α và $\pi-\alpha$)**	**Góc phụ nhau(α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$)**
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Góc hơn kém π (α và $\pi+\alpha$)	**Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$ (α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$)**

$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

Chú ý: Để nhớ nhanh các công thức trên ta nhớ câu: " cos đối sin bù phụ chéo hơn kém π tang côtang, hơn kém $\frac{\pi}{2}$ chéo sin". Với nguyên tắc nhắc đến giá trị nào thì nó bằng còn không nhắc thì đối.