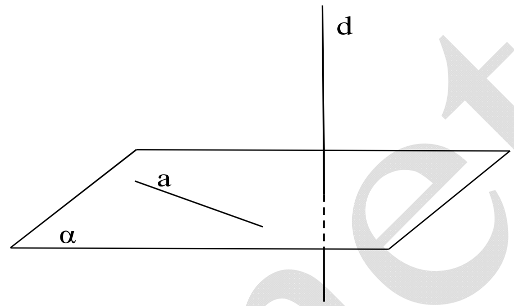
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I. Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó:

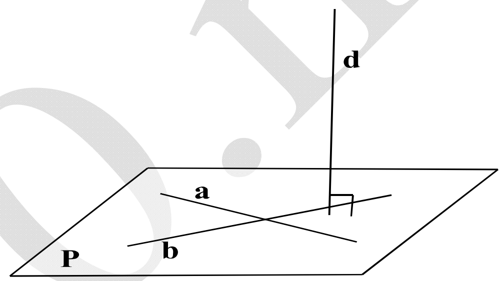
$d \perp mp(\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$



II. Các định lý:

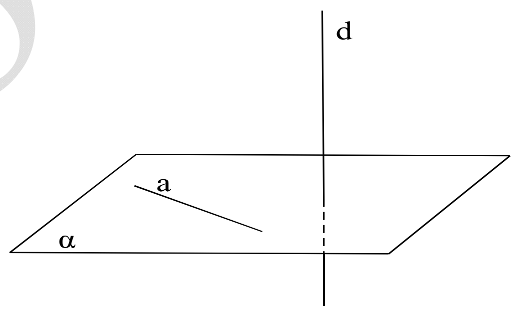
Định lý 1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P):

$$\begin{cases} d \perp a, d \perp b \\ a, b \subset (P) \\ a, b \ \text{cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



Định lý 2: (Ba đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

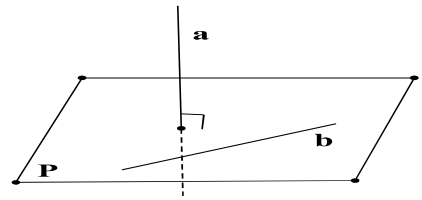


PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Để chứng minh a $\perp$ b ta thường sử dụng những phương pháp chứng minh sau:

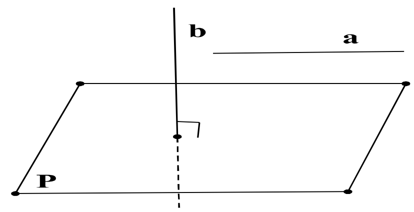
1. Sử dụng các phương pháp Hình học phẳng: Góc nội tiếp, Định lí Pitago đảo, . . .
3. Sử dụng phương pháp tích vô hướng của hai véctơ: nếu $\vec{a}.\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow a \perp b$ ($\vec{a}, \vec{b}$ là hai véctơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b).
4. Sử dụng tính chất bắc cầu: $\begin{cases} c \perp b \\ c \,//\, a \end{cases} \Rightarrow \quad a \perp b$

5. Tìm một mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b. Chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), thì $a \perp b$:



$$\begin{cases} a \perp (P) \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

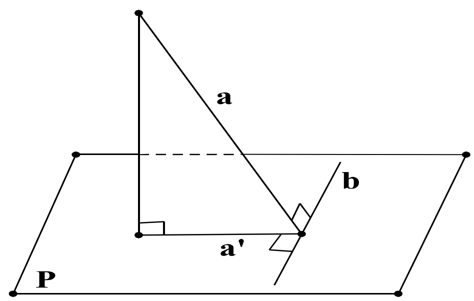
6. Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P), thì suy ra $a \perp b$:



$$\begin{cases} a \,//\, (P) \\ b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$$

7. Áp dụng định lí 3 đường vuông góc:

a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (P) *, $b \subset (P)$. Đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b khi và chỉ khi b vuông góc với a'. Nói ngắn gọn b vuông góc với hình chiếu thì b vuông góc với đường xiên.*

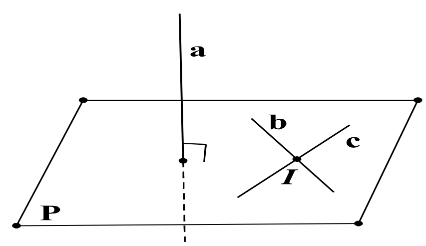


ĐÂY LÀ PHƯƠNG PHÁP RẤT HAY SỬ DỤNG! Các bạn phải thành thạo phương pháp này.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

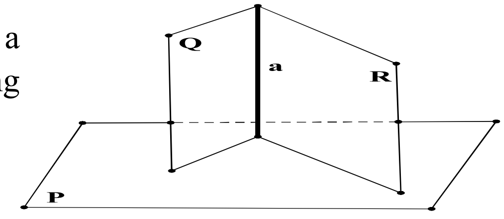
Để chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) ta thường sử dụng các phương pháp sau:

1). Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P). Ta phải chứng minh đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).



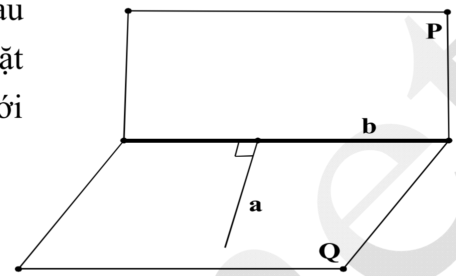
$$\begin{cases} a \perp b \text{ vaø } a \perp c \\ b \cap c \neq I \\ b; c \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \perp (P)$$

2). Hai mặt phẳng (Q) và (R) có giao tuyến a cùng vuông góc với mặt phẳng (P), thì a vuông góc với (P).



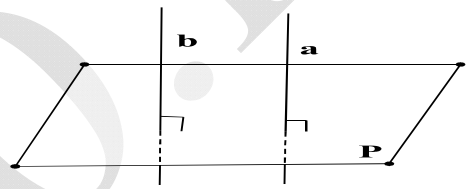
$$\begin{cases}(Q)\perp(P)\\(R)\perp(P)\\(Q)\cap(R)=a\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

3). Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến b. Một đường thẳng a thuộc mặt phẳng (Q) vuông góc với b, thì a vuông góc với mặt phẳng (P).



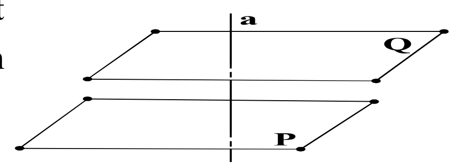
$$\begin{cases}(P)\perp(Q)\\(P)\cap(Q)=b\\a\subset(Q)\\a\perp b\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

4). Chứng minh đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (P) , đường thẳng a song song với b ,suy ra a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a\,//\,b\\b\perp(P)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

5). Chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q), mặt phẳng (P) song song với (Q), nên a vuông góc với (P).



$$\begin{cases}a\perp(Q)\\(Q)\,//\,(P)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$

Hai trụ cột để giải toán của dạng này :

– Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P), ta phải chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng (P).

– Khi đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d vuông góc với **mọi đường** thuộc mặt phẳng (P).

BÀI TẬP

Câu 1: Hai tam giác cân ABC và DBC nằm trong hai mp khác nhau tạo nên tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của BC.

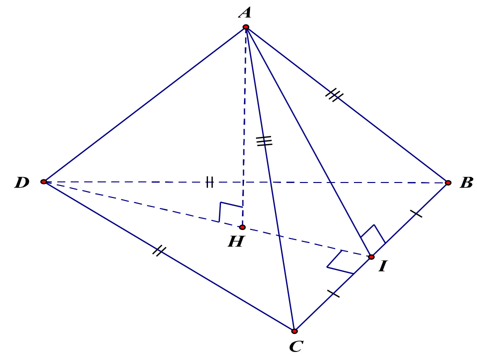
a). Chứng minh $BC\perp AD$.

b). Gọi AH là đường cao của tam giác ADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

LỜI GIẢI

a). Chứng minh $BC \perp AD$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $AI \perp BC$, và tam giác DBC cân tại D nên $DI \perp BC$.



Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp DI \\ AI, DI \subset (ADI), AI \cap DI = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp mp(ADI) \Rightarrow BC \perp AD$$

b). Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

$$\text{Có} \begin{cases} AH \perp DI (gt) \\ AH \perp BC (\text{vì } BC \perp (ADI) \supset AH) \\ BC, DI \subset (BCD), BC \cap DI = I \end{cases} \Rightarrow AH \perp mp(BCD).$$

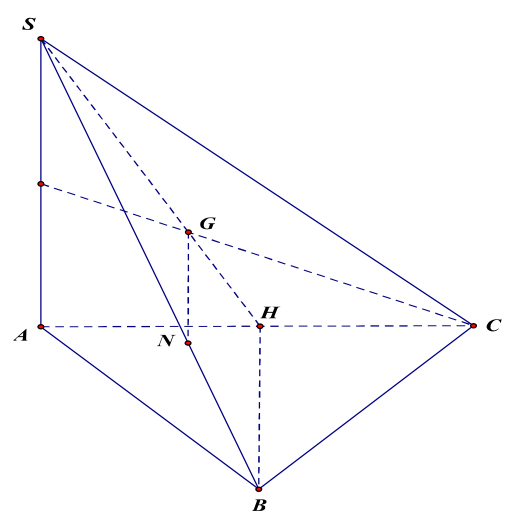
Câu 2: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với đáy (ABC), tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho SN = 2NB. Chứng minh:

a) $BC \perp (SAB)$. b) $NG \perp (SAC)$.

LỜI GIẢI

$$\text{a). Có} \begin{cases} BC \perp AB (gt) \\ BC \perp SA (\text{vì } SA \perp (ABC) \supset BC) \\ AB, SA \subset (SAB) \,\&\, AB \cap SA = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB).$$



b). Gọi H trung điểm của AC . Tam giác ABC vuông cân tại B nên $BH \perp AC$

$$\text{Có} \begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA (\text{vì } SA \perp (ABC) \supset BH) \\ SA, AC \subset (SAC) \,\&\, SA \cap AC = A \end{cases}$$

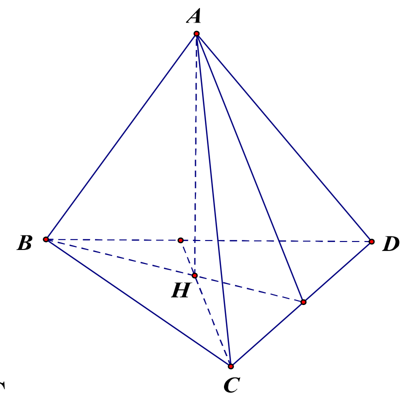
$$\Rightarrow BH \perp (SAC).$$

Xét tam giác SBH có $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{SG}{SH} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow NG \parallel BH$ (Định lý đảo Talét).

Mà $BH \perp (SAC) \Rightarrow NG \perp (SAC)$.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD). Chứng minh rằng H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

LỜI GIẢI



Có $\begin{cases} CD \perp AB(gt) \\ CD \perp AH\left(do\ AH \perp (ABC)\right) \Rightarrow CD \perp (ABH) \\ AB, AH \subset (ABH) \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp BH\left(do\ BH \subset (ABH)\right) \quad (1)$

Chứng minh tương tự $BD \perp mp(ACH)$

$\Rightarrow BD \perp AH \qquad (2)$

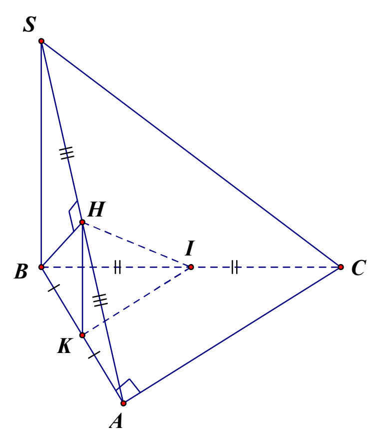
Từ (1) và (2) suy ra H trực tâm của tam giác ABC.

Vì $\begin{cases} BC \perp DH \\ BC \perp AH(gt) \\ AH, DH \subset (ADH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp mp(ADH) \Rightarrow BC \perp AD\left(do\ AD \subset (ADH)\right)$

Cho tứ diện SABC có đáy ABC vuông tại A, biết $SB \perp (ABC), SB = AB$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC. Chứng minh rằng:

a). $AC \perp (SAB)$ b). $BH \perp (SAC)$ c). $KI \perp SA$ d). $AB \perp IH$

LỜI GIẢI



a). Có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SB \\ AB, SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$

b). Vì $SB = AB \Rightarrow \Delta SAB$ cân tại $B \Rightarrow BH \perp SA$

Có $\begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp AC\left(do\ AC \perp (SAB) \supset BH\right) \Rightarrow BH \perp (SAC) \\ SA, AC \subset (SAC) \end{cases}$

c). KI là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow KI \parallel AC$,

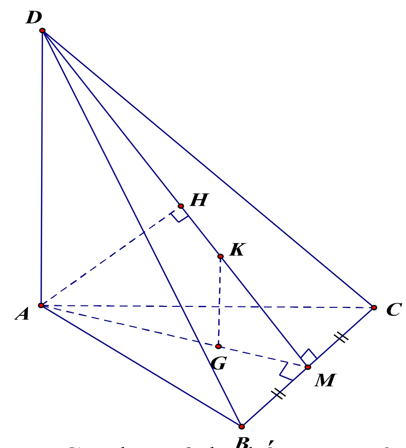
mà $AC \perp (SAB) \Rightarrow KI \perp (SAB) \Rightarrow KI \perp SA\left(do\ SA \subset (SAB)\right)$.

d). Có HK là đường trung bình của $\Delta SAB \Rightarrow HK \parallel SB$, mà $SB \perp AB \Rightarrow HK \perp AB$.

Vậy $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp KI \\ HK, KI \subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (HIK) \Rightarrow AB \perp IH$

Câu 4: Cho tứ diện ABCD có $DA \perp (ABC)$, ABC là tam giác cân tại A. Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $AH \perp MD$ tại H.
a). Chứng minh $AH \perp (BCD)$.
b). Gọi G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

LỜI GIẢI



a). Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Vì ΔABC cân tại A nên $BC \perp AM$,

và $BC \perp AD \Rightarrow BC \perp mp(DAM)$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp BC\left(BC \perp (DAM)\right) \\ AH \perp DM(gt) \\ BC, DM \subset (BCD),\ BC \cap DM = M \end{cases}$

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$.

b). Chứng minh $GK \perp (ABC)$.

Vì G, K lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DBC. Theo tính chất trọng tâm:

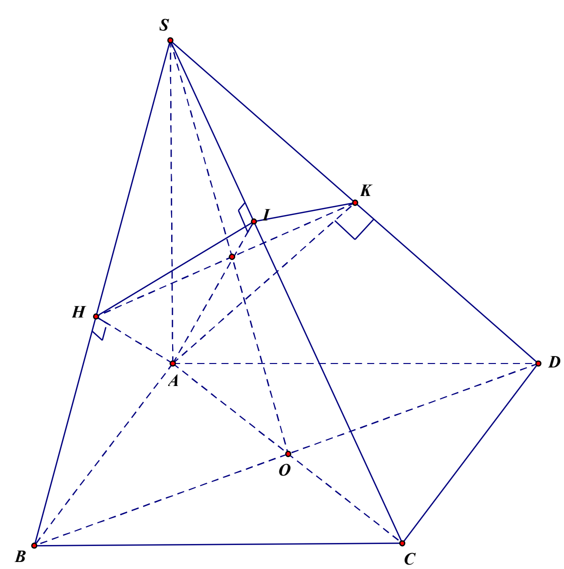
$\begin{cases} \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{DK}{DM} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{DK}{DM} \Rightarrow AD \parallel KG$ (theo định lý Talet đảo).

Mà $AD \perp (ABC) \Rightarrow KG \perp (ABC)$ (đpcm)

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD , có đáy là hình vuông tâm O. $SA \perp (ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.
a) CMR: $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.
b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
c) CMR: $HK \perp (SAC)$. Từ đó suy ra $HK \perp AI$.

LỜI GIẢI

a) CMR: $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.



Chứng minh $BC \perp (SAB)$. Có

$\begin{cases} BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BC \perp AB(gt) \\ SA, AB \subset (SAB),\ SA \cap AB = A \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Chứng minh $CD \perp (SAD)$.

Vì $\begin{cases} CD \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD(gt) \\ SA, AD \subset (SAD),\ SA \cap AD = A \end{cases}$

$\Rightarrow CD \perp (SAD)$

Chứng minh $BD \perp (SAC)$. Vì $\begin{cases} DB \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \\ BD \perp AC(gt) \\ SA, AC \subset (SAC), SA \cap AC = A \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC

Có $\begin{cases} AH \perp SB(gt) \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \\ SB, BC \subset (SBC)\ \&\ SB \cap BC = B \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Có $\begin{cases} AK \perp SD(gt) \\ AK \perp CD\left(CD \perp (SAD)\right) \\ SD, CD \subset (SCD), SD \cap CD = D \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Vì AH, AK, AI có chung điểm A và cùng vuông góc với SC. Nên ba đường thẳng AH, AK, AI đồng phẳng.

c). Ta có tam giác $\Delta SAB = \Delta SAD(c.g.c)$. Nên 2 đường cao xuất phát từ đỉnh A bằng nhau $\Rightarrow AH = AK$, như vậy $\Delta SHA = \Delta SKA$ (cạnh huyền cạnh góc vuông) $\Rightarrow SH = SK$.

Từ đó có: $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$ (theo định lý đảo Talet).

Mà $BD \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI\left(AI \subset (SAC)\right)$.

Cho đường tròn (C) đường kính AB nằm trong mp(P). Gọi (d) là đường vuông góc với (P) tại A. Gọi S là một điểm trên (d), $M \in (C)$

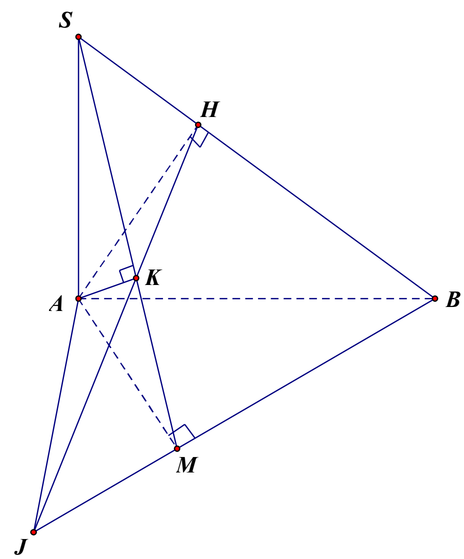
a). Chứng minh rằng $MB \perp (SAM)$

b). Dựng $AH \perp SB, AK \perp SM$ lần lượt tại H và K. Chứng minh $AK \perp (SMB)$ và $SB \perp (AHK)$.

c). Gọi J là giao điểm của HK và MB. Chứng minh AJ là tiếp tuyến của (C).

LỜI GIẢI

a). Do tam giác ABM nội tiếp trong đường tròn (C) đường kính AB, nên ΔABM vuông tại M.



Có $\begin{cases} BM \perp AM \\ BM \perp SA \\ AM, SA \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAM)$

b). Có $\begin{cases} AK \perp SM \\ AK \perp BM\left(\text{do } BM \perp (SAM) \supset AK\right) \\ SM, BM \subset (SBM) \end{cases}$

$\Rightarrow AK \perp (SBM)$.

Có $\begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK\left(\text{do } AK \perp (SBM) \supset SB\right) \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases}$

$\Rightarrow SB \perp (AHK)$

c). Có $SA \perp (ABM)$ mà $AJ \subset (ABM) \Rightarrow SA \perp AJ$ (1). Ngoài ra có $SB \perp (AHK)$ mà $AJ \subset (AHK) \Rightarrow SB \perp AJ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AJ \perp (SAB) \Rightarrow AJ \perp AB$. Trong mp(P) có AJ vuông góc với AB là đường kính của đường tròn (C). Suy ra AJ là tiếp tuyến của (C).

Câu 6: Cho tứ diện O.ABC có 3 cạnh OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H. Chứng minh :

a. $OA \perp BC,\ OB \perp CA,\ OC \perp AB$.

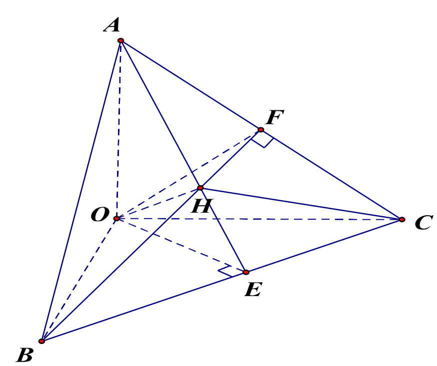
b. H là trực tâm của tam giác ABC.

c. $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

d. $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OAC}$.

e. Các góc của tam giác ABC đều là góc nhọn.

LỜI GIẢI



a). Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \\ OB, OC \subset (OBC) \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\Rightarrow OA \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \\ OA, OC \subset (OAC) \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC)$

$\Rightarrow OB \perp AC$.