

CHUYÊN ĐỀ
CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn

a) **Đơn vị radian:** Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian. Góc ở tâm chắn cung 1 radian gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian. 1 radian còn viết tắt là 1 rad.

Vì tính thông dụng của đơn vị radian người ta thường không viết radian hay rad sau số đo của cung và góc.

b) **Độ dài cung tròn. Quan hệ giữa độ và radian:**

Cung tròn bán kính R có số đo α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), có số đo a° ($0 \leq a \leq 360$) và có độ dài là l thì:

$$l = R\alpha = \frac{\pi a}{180} \cdot R \text{ do đó } \frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$$

Đặc biệt: $1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$.

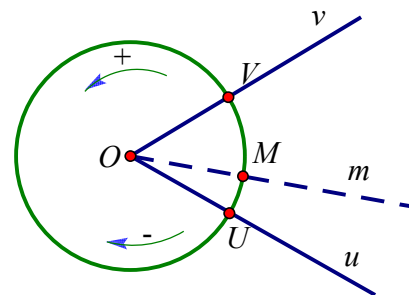
2. Góc và cung lượng giác.

a) **Đường tròn định hướng:** Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều dương (cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm).

b) **Khái niệm góc, cung lượng giác và số đo của chúng.**

Cho đường tròn định hướng tâm O và hai tia Ou, Ov lần lượt cắt đường tròn tại U và V . Tia Om cắt đường tròn tại M , tia Om chuyển động theo một chiều (âm hoặc dương) quay quanh O khi đó điểm M cũng chuyển động theo một chiều trên đường tròn.

- Tia Om chuyển động theo một chiều từ Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói tia Om đã quét được một **góc lượng giác** tia đầu là Ou , tia cuối là Ov . Kí hiệu (Ou, Ov)
- Điểm M chuyển động theo một từ điểm U đến trùng với điểm V thì ta nói điểm M đã vạch nên một **cung lượng giác** điểm đầu U , điểm cuối V . Kí hiệu là UV
- Tia Om quay đúng một vòng theo chiều dương thì ta nói tia Om quay góc 360° (hay 2π), quay hai vòng thì ta nói nó quay góc $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$ (hay 4π), quay theo chiều âm một phần tư vòng ta nói nó quay góc -90° (hay $-\frac{\pi}{2}$), quay theo chiều âm ba vòng bốn phần bảy ($\frac{25}{7}$ vòng) thì nói nó quay góc $-\frac{25}{7} \cdot 360^\circ$ (hay $-\frac{50\pi}{7}$)...
- Ta coi số đo của góc lượng giác (Ou, Ov) là số đo của cung lượng giác UV



c) **Hệ thức Sa-lơ:**

- Với ba tia Ou, Ov, Ow tùy ý ta có:

$$\text{Số}(Ou, Ov) + \text{Số}(Ov, Ow) = \text{Số}(Ou, Ow) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Sđ}(Ou, Ov) - \text{Sđ}(Ou, Ow) = \text{Sđ}(Ow, Ov) + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Với ba điểm tùy ý U, V, W trên đường tròn định hướng ta có :

$$\overset{\text{p}}{\text{Sđ}}UV + \overset{\text{p}}{\text{Sđ}}VW = \overset{\text{p}}{\text{Sđ}}UV + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\overset{\text{p}}{\text{Sđ}}UV - \overset{\text{p}}{\text{Sđ}}UV = \overset{\text{p}}{\text{Sđ}}WV + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

§3. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng:

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi, hạ bậc:

a) Công thức nhân đôi.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

b) Công thức hạ bậc.

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích.

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cdot \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a + b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \cdot \sin b}$$

$$\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \cdot \sin b}$$