CHUYÊN ĐỀ: BẤT ĐẲNG THỨC

LÝ THUYẾT

1. $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$

2. $A \le A$

3. $A > B \Leftrightarrow A \pm C > B \pm C$

4. $\begin{cases} A \ge B \\ A \le B \end{cases} \Leftrightarrow A = B$

5. $\begin{cases} A \ge B \\ B \ge C \end{cases} \Rightarrow A \ge C$

6. $\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow A + C > B + D$

7. $A > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AC > BC \text{ nếu } C > 0 \\ AC < BC \text{ nếu } C < 0 \end{array}\right.$

8. $|x| \ge 0$

9. $|x| \le a (a > 0) \Leftrightarrow -a \le x \le a$

10. $|x| \ge a (a > 0) \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$

* ***Bất đẳng thức Côsi:*** + Nếu a, b không âm (tức là $a, b \ge 0$) thì $a + b \ge 2\sqrt{ab}$ hoặc $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

+ Nếu a, b, c không âm (tức là $a, b, c \ge 0$) thì $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$ hoặc $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I: LÝ THUYẾT

+ *Một số bất đẳng thức thông dụng:* a) $a^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$

b) $(a - b)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) $(a + b)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$

d) $(a + b + c)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = -c$

e) $(a + b - c)^2 \ge 0$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a + b = c$

+ *Phương pháp chứng minh:* Để c/m: $A \ge B \Leftrightarrow A - B \ge 0$ (đúng) và xét A = B khi nào?

Ghi nhớ: + $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

+ Nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác thì $a + b > c \Leftrightarrow a + b - c > 0$

(tổng hai cạnh lớn hơn cạnh thứ ba)

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Cho a, b > 0. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$

Giải: Ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\,(1) \Leftrightarrow a^2+b^2\ge 2ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (đúng)

Vậy: (1) đúng $\forall a, b > 0$. Dấu "=" xãy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 2: Với a, b bất kì. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+4\ge ab+2(a+b)$

Giải: Ta có: $a^2+b^2+4\ge ab+2(a+b)$ (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+4-ab-2a-2b\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+8-2ab-4a-4b\ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2-2ab)+(a^2-4a+4)+(b^2-4b+4)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2\ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2$

Bài 3: Với a, b bất kì. Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$

Giải: Ta có: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4}\le\frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2\le 2a^2+2b^2$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 4: Với mọi a, b, c. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$

Giải: Ta có: $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$ (1) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4}+b^2+c^2-ab+ac-2bc\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}-b+c\right)^2\ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a-2b = -2c$

Bài 5: Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng: $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$

Giải: Ta có: $a^3+b^3\ge a^2b+ab^2$ (1) $\Leftrightarrow a^3+b^3-a^2b-ab^2\ge 0 \Leftrightarrow a^3-a^2b+b^3-ab^2\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2(a-b)-b^2(a-b)\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2)\ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ (đúng). Vậy (1) đúng

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

Bài 6: Với mọi a, b, c. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

Giải: Ta có: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\ge 0 \Leftrightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\ge 0$ (đúng). Vậy: (1) đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Bài 7: Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác

a) Chứng minh: $(b - c)^2 < a^2$

b) Từ đó suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Giải: a) a, b, c là ba cạnh của tam giác nên: * $a + c > b \Rightarrow a + c - b > 0$

* $a + b > c \Rightarrow a + b - c > 0$

Suy ra: $(a + c - b)(a + b - c) > 0 \Leftrightarrow [a - (b - c)][a + (b - c)] > 0$

$\Leftrightarrow a^2 - (b - c)^2 > 0 \Leftrightarrow a^2 > (b - c)^2$ (đpcm)

b) Theo câu a) Ta có: $a^2 > (b - c)^2$, chứng minh tương tự, ta được:

$b^2 > (c - a)^2$

$c^2 > (a - b)^2$

Suy ra: $a^2 + b^2 + c^2 > (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 > b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

III: BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi a, b, c, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

Bài 2: Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\dfrac{a}{bc} + \dfrac{b}{ca} + \dfrac{c}{ab} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$

Bài 3: Với mọi x, y, z. Chứng minh rằng: $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

Bài 4: Với mọi a, b. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$

Bài 5: Với mọi x, y, z. Chứng minh rằng: $2xyz \leq x^2 + y^2z^2$

Bài 6: Với mọi x, y. Chứng minh rằng: $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2$

Bài 7: Với mọi a, b. Chứng minh rằng: $2 + a^2(1 + b^2) \geq 2a(1 + b)$

Bài 8: Cho a > 0, b > 0. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Bài 9: Cho a, b bất kì. Chứng minh rằng: $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + 1 > 0$

DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I: LÝ THUYẾT

:Với 2 số a, b không âm, ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

II: BÀI TẬP MẪU

Bài 1: Với a, b ≥ 0. Chứng minh rằng: $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$

Giải: Ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$ab + 1 \geq 2\sqrt{ab}$$

Suy ra: $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ ab = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1$

Bài 2: Chứng minh rằng: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$

Giải: Ta có: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) = a^2 + a^2b^2 + b^2 + b^2c^2 + c^2 + c^2a^2$

$$= (a^2 + b^2c^2) + (b^2 + c^2a^2) + (c^2 + a^2b^2)$$

Theo BĐT Côsi, ta có: $a^2 + b^2c^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$

$$b^2 + c^2a^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

$$c^2 + a^2b^2 \geq 2\sqrt{a^2b^2c^2} = 2abc$$

Suy ra: $(a^2 + b^2c^2) + (b^2 + c^2a^2) + (c^2 + a^2b^2) \geq 6abc$

Vậy: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = b^2c^2 \\ b^2 = a^2c^2 \\ c^2 = a^2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$

Bài 3: Với a, b, c > 0. Chứng minh rằng: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

Giải: Ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

Suy ra: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt[3]{\frac{abc}{abc}} = 9\sqrt[3]{1} = 9$ hay $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$