CHUYÊN ĐỀ BỒI DƯỠNG TOÁN 8

CHUYÊN ĐỀ 16 – BẤT ĐẲNG THỨC

Phần I : các kiến thức cần lưu ý

1-Đinhnghĩa: $\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$

2-tính chất

+ A>B $\Leftrightarrow B < A$	+ $A > B > 0 \Rightarrow A^n > B^n \quad \forall n$
+ A>B và B >C $\Leftrightarrow$ A > C	+ $A > B \Rightarrow A^n > B^n$ với n lẻ
+ A>B $\Rightarrow$ A + C >B + C	+ $\|A\| > \|B\| \Rightarrow A^n > B^n$ với n chẵn
+ A>B và C > D $\Rightarrow$ A +C > B + D	+ m > n > 0 và A > 1 $\Rightarrow A^m > A^n$
+ A>B và C > 0 $\Rightarrow$ A.C > B.C	+ m > n > 0 và 0 <A < 1 $\Rightarrow A^m < A^n$
+ A>B và C < 0 $\Rightarrow$ A.C < B.C	+A < B và A.B > 0 $\Rightarrow \frac{1}{A} > \frac{1}{B}$
+ 0 < A < B và 0 < C < D $\Rightarrow$ 0 < A.C < B.D	

3 - một số hằng bất đẳng thức

+ $A^2 \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $A^n \geq 0$ với $\forall$ A (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ $|A| \geq 0$ với $\forall A$ (dấu = xảy ra khi A = 0)

+ -$|A| < A = |A|$

+ $|A+B| \geq |A| + |B|$ (dấu = xảy ra khi A.B > 0)

+ $|A-B| \le |A|-|B|$ (dấu = xảy ra khi A.B < 0)

<u>Phần II</u> : một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức

1) Phương pháp 1: dùng định nghĩa

<u>Kiến thức</u> : Để chứng minh A > B Ta chứng minh A – B > 0

Lưu ý dùng hằng bất đẳng thức $M^2 \ge 0$ với $\forall$ M

<u>Ví dụ 1</u> $\forall$ x, y, z chứng minh rằng :

a) $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \ge 2xy - 2xz + 2yz$

<u>Giải:</u>

a) Ta xét hiệu : $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{2}.2.(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right] \ge 0$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vì $(x-y)^2 \ge 0$ với$\forall$x ; y .Dấu bằng xảy ra khi x = y

$(x-z)^2 \ge 0$ với$\forall$x ; z . Dấu bằng xảy ra khi x = z

$(y-z)^2 \ge 0$ với$\forall$ z; y . Dấu bằng xảy ra khi z = y

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + yz + zx$. Dấu bằng xảy ra khi x = y =z

b)Ta xét hiệu:

$x^2 + y^2 + z^2 - (2xy - 2xz + 2yz) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = (x - y + z)^2 \ge 0$

đúng với mọi x;y;z$\in R$

Vậy $x^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy - 2xz + 2yz$ đúng với mọi x;y;z$\in R$

Dấu bằng xảy ra khi x + y = z

<u>Ví dụ 2:</u> chứng minh rằng :

a) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; b) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ c) Hãy tổng quát bài toán

<u>giải</u>

a) Ta xét hiệu

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2\left(a^2+b^2\right)}{4} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab\right) =$$

$$\frac{1}{4}(a-b)^2 \geq 0$$

Vậy $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b

b)Ta xét hiệu: $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} - \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right] \geq 0$

Vậy $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$ Dấu bằng xảy ra khi a = b =c

c)Tổng quát: $\frac{a_1^2+a_2^2+....+a_n^2}{n} \geq \left(\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}\right)^2$

* Tóm lại các bước để chứng minh A$\geq$B theo định nghĩa

Bước 1: Ta xét hiệu H = A - B

Bước 2:Biến đổi H = $(C+D)^2$ hoặc H=$(C+D)^2 + \dots + (E+F)^2$

Bước 3: Kết luận A ≥ B

2) phương pháp 2 : Dùng phép biến đổi tương đương

Lưu ý:

Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức đúng hoặc bất đẳng thức đã được chứng minh là đúng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c, d,e là các số thực chứng minh rằng

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

Giải:

a) $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab \Leftrightarrow 4a^2 + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow 4a^2 - 4a + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - b)^2 \geq 0$ (Bđt này luôn đúng)

Vậy $a^2 + \frac{b^2}{4} \geq ab$ (dấu bằng xảy ra khi 2a = b)

b) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + 1) > 2(ab + a + b)$

$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$ (luôn đúng)

Vậy $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ Dấu bằng xảy ra khi a = b = 1

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b + c + d + e)$