PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN CÓ ĐIỀU KIỆN NGHIỆM, THAM SỐ

I LÝ THUYẾT

Khi giải phương trình lượng giác có nghiệm thỏa điều kiện cho trước, ta làm như sau:

Bước 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình.

Bước 2. Giải phương trình để tìm nghiệm.

Bước 3. So sánh nghiệm với điều kiện xác định của phương trình và điều kiện cho trước của bài toán để loại những nghiệm không thỏa

II BÀI TẬP MẪU

Câu 1. Giải phương trình $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ với $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$

Giải:

Phương trình tương đương với $\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$

Vì $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-\pi}{4}<\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-7\pi}{12}<\frac{k\pi}{2}<\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{-7}{6}<k<\frac{2}{3}$

Do $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{-1;0\}$.

Với $k=-1$ thì $x=\frac{-\pi}{6}$, với $k=0$ thì $x=\frac{\pi}{3}$.

Vậy $x=\frac{-\pi}{6}$ và $x=\frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Tìm nghiệm $0<x<\pi$ của phương trình $\sin 2x=-\frac{1}{2}$.

Giải:

Ta có $\sin 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Trường hợp 1: $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$. Do $0 < x < \pi$ nên $0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 1$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{11\pi}{12}$.

- Trường hợp 2: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$. Do $0 < x < \pi$ nên $0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi$

$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < \frac{5}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 0$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{7\pi}{12}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{11\pi}{12}, x = \frac{7\pi}{12}$.

Câu 3. Tìm nghiệm $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$.

Giải:

Ta có $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., \ k \in \mathbb{Z}.$$

- Trường hợp 1: $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. Do $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + k2\pi \le \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{6}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k = 0$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$.

- Trường hợp 2: $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$. Do $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ nên $-\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{6}+k2\pi\le\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le k\le -\frac{1}{6}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên ta không chọn được giá trị k thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{\pi}{6}$.

Câu 4. Tìm nghiệm $\pi\le x\le 3\pi$ của phương trình $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

Giải:

Ta có $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Do $\pi\le x\le 3\pi$ nên $\pi\le\frac{\pi}{4}+k2\pi\le 3\pi\Leftrightarrow\frac{3}{8}\le k\le\frac{11}{8}$.

Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn được $k=1$ thỏa mãn. Do đó, ta được nghiệm $x=\frac{9\pi}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=\frac{9\pi}{4}$.

Câu 5. Tìm nghiệm $0\le x\le 2\pi$ của phương trình $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

Giải:

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi\\ x=-\frac{13\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Vì $0\le x\le 2\pi$ nên $\left[\begin{array}{l}0\le\frac{5\pi}{12}+k2\pi\le 2\pi\\ 0\le-\frac{13\pi}{12}+k2\pi\le 2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{24}\le k\le\frac{19}{24}\\ \frac{13}{14}\le k\le\frac{37}{24}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=1\end{array}\right.$

Vậy phương trình trên có hai nghiệm $x=\frac{5\pi}{12}, x=\frac{11}{12}\pi.$

Cõu 6. Giải phương trõnh $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ với $0\le x\le 2\pi$

Giải:

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi \\ x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Xét $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi$: Vì $0\le x\le 2\pi$ nên $x=\frac{23\pi}{12}$

Xét $x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi$: Vì $0\le x\le 2\pi$ nên $x=\frac{17\pi}{12}$

Vậy tập nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện là $S=\left\{\frac{23\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right\}$

Câu 7. Tìm nghiệm $x\in\left(-180^\circ;180^\circ\right)$ của phương trình $2\sin\left(2x-40^\circ\right)=\sqrt{3}$

Giải:

Ta có $2\sin\left(2x-40^\circ\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(2x-40^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x-40^\circ\right)=\sin 60^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-40^\circ=60^\circ+k360^\circ \\ 2x-40^\circ=120^\circ+k360^\circ \end{array}\right., \; k\in\mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=100^\circ+k360^\circ \\ 2x=160^\circ+k360^\circ \end{array}\right., \; k\in\mathbb{Z}. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=50^\circ+k180^\circ \\ x=80^\circ+k180^\circ \end{array}\right., \; k\in\mathbb{Z}.$$

- **Với** $k=0$ **thì** $x=50^\circ, x=80^\circ$

- **Với** $k=-1$ **thì** $x=-130^{\circ}, x=-100^{\circ}$**.**

Vậy có 4 nghiệm thuộc $\left(-180^{\circ};180^{\circ}\right)$ là $x=50^{\circ}, x=80^{\circ}, x=-130^{\circ}, x=-100^{\circ}$.

Câu 8. Tìm nghiệm của phương trình $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0;3\pi)$.

Giải:

Ta có: $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$.

☞ Cách 1: Dựa vào đường tròn lượng giác ta có số nghiệm của phương trình là 6.

☞Cách 2: Giải lần lượt:

$0<\frac{\pi}{6}+k\pi<3\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{6}<k<\frac{17}{6}\Rightarrow k=0,1,2$.

$0<\frac{\pi}{3}+k\pi<3\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{3}<k<\frac{8}{3}\Rightarrow k=0,1,2$.

Vậy các nghiệm của phương trình thuộc $(0;3\pi)$ là $\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{7\pi}{6};\frac{4\pi}{3};\frac{13\pi}{6};\frac{10\pi}{3}$. .

Câu 9. Giải phương trình $2\tan x-2\cot x-3=0$ với $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$

Giải:

Điồu kiộn: $\sin 2x\neq 0$.

Phương trình: $2\tan x-2\cot x-3=0$.

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x-3\tan x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=2\\ \tan x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Dùng đường tròn lượng giác ta thốy trờn khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\pi\right)$ phương trõnh cú 3 nghiệm.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\cos^2 x - \cos x = 0$ thỏa điều kiện $0 < x < \pi$.

Giải:

Ta có $\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z})$$

Với $0 < x < \pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 < \dfrac{\pi}{2} + k\pi < \pi \\ 0 < k2\pi < \pi\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\dfrac{1}{2} < k < \dfrac{1}{2} \\ 0 < k < \dfrac{1}{2}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 0 \\ VN\end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}.$

Vậy nghiệm của phương trình có nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2}$ thỏa điều kiện đề bài.

Câu 11. Tìm nghiệm của phương trình $\cos 2x + \sin x = 0$ trong khoảng $[0; 2\pi)$.

Giải:

$$\cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin x \Leftrightarrow \cos 2x = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = x + \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x = -x - \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k2\pi}{3}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $x \in [0; 2\pi) \Rightarrow x \in \left\{\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

Cõu 12. Giải phương trõnh $\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ với $[2\pi; 4\pi]$

Giải:

Điều kiện: $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$. Trên $[2\pi, 4\pi]$, điều kiện $x \neq 3\pi$.

Ta có $\dfrac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

Vì $x\in[2\pi,4\pi]$ nên $2\pi<k\frac{\pi}{3}<4\pi\Leftrightarrow 6<k<12;k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=7;8;9;10;11$

$x=2\pi,\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3},3\pi,\frac{10\pi}{3},\frac{11\pi}{3},4\pi$.

So với điều kiện, ta chỉ còn $x=2\pi,\frac{7\pi}{3},\frac{8\pi}{3},\frac{10\pi}{3},\frac{11\pi}{3},4\pi$.

Câu 13. Giải phương trình $\cos^2x+\cos x=0$ với $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

Giải:

$$\cos^2x+\cos x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\pi+k\pi\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}.$$

Do $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=\pi$

Câu 14. Giải phương trình $2\sin^2x-3\sin x+1=0$ với $0\le x<\frac{\pi}{2}$

Giải:

Đặt $t=\sin x\,(-1\le t\le 1)$, phương trình trở thành: $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $t=1$, ta có: $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Do $0\le x<\frac{\pi}{2}$ nên $0\le\frac{\pi}{2}+k2\pi<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{-1}{4}\le k<0$. Vì $k\in\mathbb{Z}$ nên không tồn tại k.

Với $t=\frac{1}{2}$, ta có: $\sin x=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

Do $0\le x<\frac{\pi}{2}$ nên $x=\frac{\pi}{6}$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{\pi}{6}$ thỏa điều kiện $0\le x<\frac{\pi}{2}$.