8 CÁCH CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU

I. MỘT SỐ CÁCH THỨC THƯỜNG SỬ DỤNG:

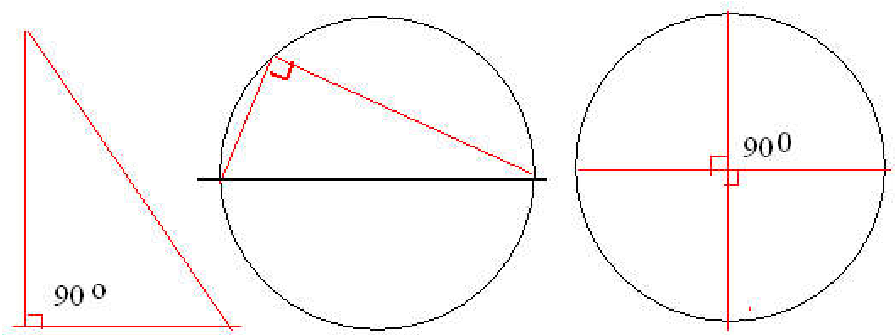
- **Cách 1**: (***Theo Định nghĩa 2 đường thẳng vuông góc***):

Hai đường thẳng cắt nhau hoặc 2 tia thẳng tạo ra góc đo 90^0; Thí dụ:

- 1.a/ Trường hợp $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ là 3 góc của TG vuông mà

$$\angle B + \angle C = 90^0 \quad \Rightarrow \angle A = 180^0 - 90^0 = 90^0$$

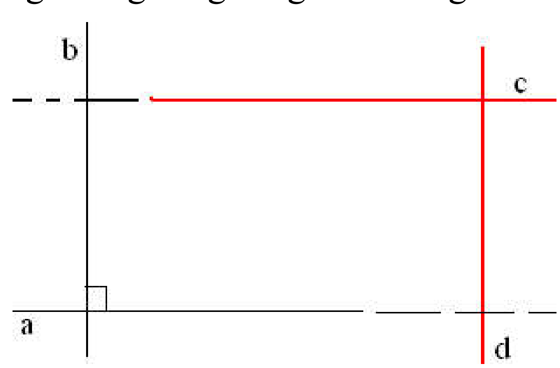
- 1.b/Trường hợp góc nội tiếp chắn 1/2 đường tròn ($180^0:2 = 90^0$)
- 1.c/Trường hợp 2 đường thẳng giao nhau chia đường tròn thành 4 phần bằng nhau ($360^0:4 = 90^0$)
- 1.d/ Trường hợp góc tạo bởi 2 phân giác của 2 góc kề bù



1a 1b 1c

- **Cách 2**: ***Theo Hệ quả của 2 đường thẳng song song***

2.1 Đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.



Có c//a; Nếu $b \perp a \Rightarrow b \perp c$

2,2 – Hai đường song song với

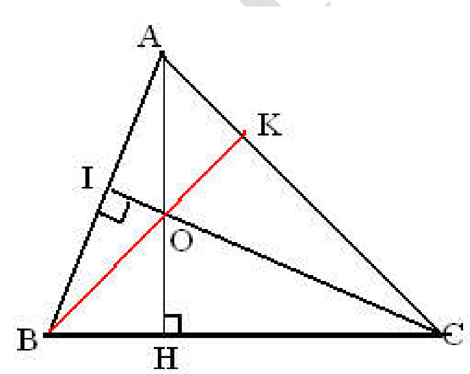
hai đường vuông góc đã biết.

Có $a \perp b$; $d // a$; $c // b \Rightarrow c \perp d$

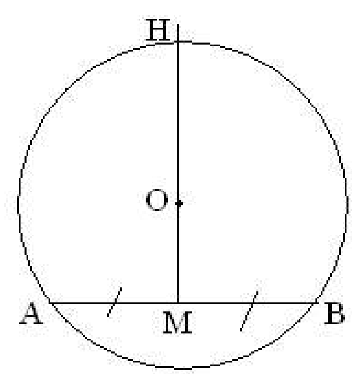
- **Cách 3**: Dùng tính chất của ba đường cao và cạnh đối diện trong một tam giác.

Trong ΔABC có $AH \perp BC$; $CI \perp AB$

$\Rightarrow BO \perp AC$ tại K



- **Cách 4**: Đường kính đi qua trung điểm của một dây cung.

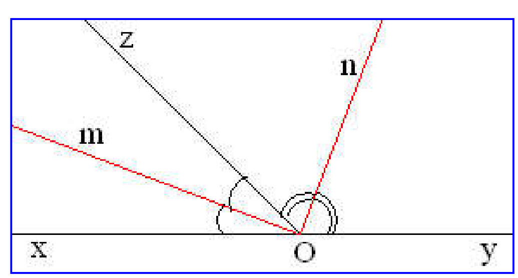


AB là dây cung trong đường tròn O

Néu $AM = MB \Rightarrow OM \perp AB$

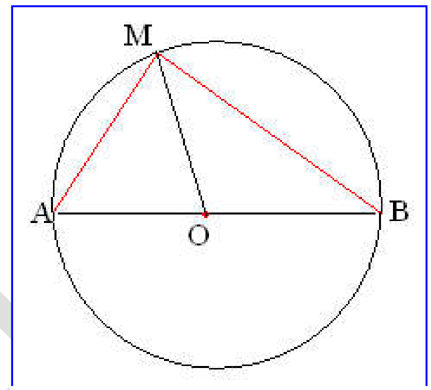
- **Cách 5**: Phân giác của hai góc kề bù nhau.

Có $\angle xOz$ kề bù $\angle zOy$



Nếu $O_1 = O_2$ và $O_3 = O_4$

$\Rightarrow$ O2 + O3 = 90O hay $Om \perp On$

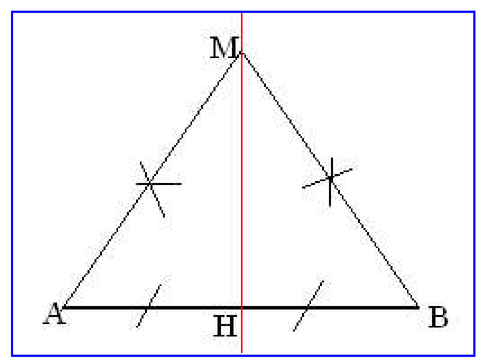


- **Cách 6:** Sử dụng góc nội tiếp nửa đường tròn.

Trên đường tròn tâm O, đường kính AB

$\Rightarrow$ Mọi điểm M trên đường tròn đều có

AM ⊥BM

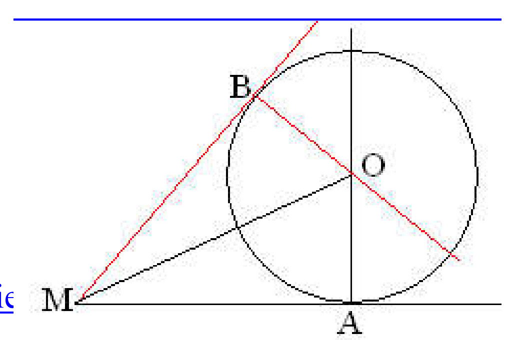


- **Cách 7:** Sử dụng tính chất đường trung trực.

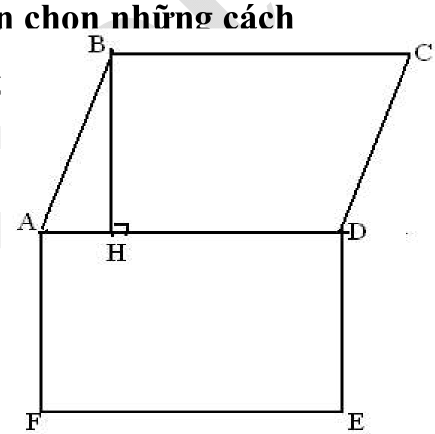
Có H là trung điểm của AB; Điểm M cách đều A và B $\Rightarrow$ **MH ⊥AB**

- **Cách 8:** Tính chất tiếp tuyến và đường kính của đường tròn.

Nếu đường tròn O tiếp xúc với MA hoặc MB tại A hoặc B thì OA⊥ MA và OB ⊥MB



Có một số bài toán chỉ cần áp dụng 1 trong số các cách trên, nhưng nhiều bài toán phải vận dụng cùng lúc nhiều cách. Khi làm bài nên chọn những cách gọn và sáng sủa; nếu có điều kiện thì trình bày nhiều các



II. BÀI TOÁN MINH HOẠ

✪ Bài toán 1

Cho hình bình hành ABCD, BH là đường cao từ B tới AD.

Từ A kẻ AF//và = BH;

Từ F kẻ FE// và = AD.

CMR tứ giác ADEF là hình chữ nhật.

Giải (***Áp dụng cách 1 & 2***)

Dễ dàng CM được 4 góc của ADEF đều = 90^0 (các cặp cạnh kề đều vuông góc nhau). vì:

AF//BH; FE//AD mà AD ⊥ BH AF ⊥ FE và AF⊥ AD

FE// và = AD nên DE// và = AF

tương tự ta có FE ⊥ED; ED ⊥DA. ➔ Vậy ADFE là hình chữ nhật

✪ Bài toán 2

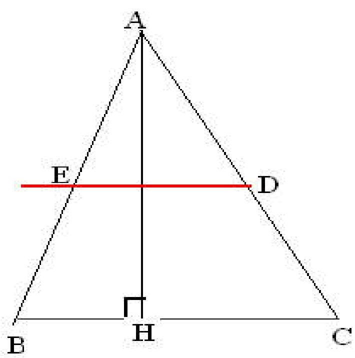
Chứng minh rằng đường trung bình của tam giác luôn vuông góc với đường cao hạ tới cạnh tương ứng của đường trung bình:

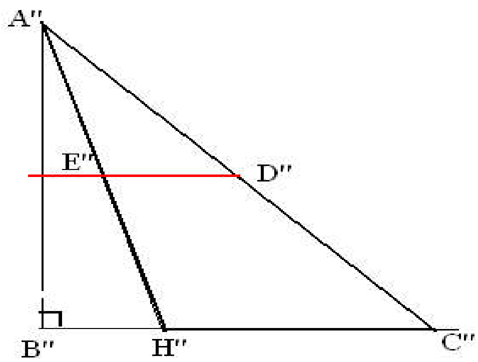
Giải (***theo cách 2***)

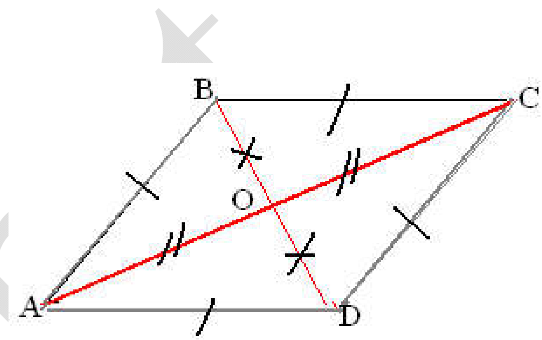
Giả sử có Δ ABC với DE là đường TB tương ứng với cạnh BC thì DE//BC.

Đường cao AH (hạ từ A tới đáy BC) ⇒ AH ⊥ BC ⇒ **AH ⊥ DE** (ĐPCM)

Điều KL này đúng với cả khi AH không ở trong Δ ABC.







✪ Bài toán 3

Từ tính chất của hình thoi: có 4 cạnh bằng nhau và các cặp cạnh đối diện song nhau từng đôi một, hãy chứng minh 2 đương chéo hình thoi vuông góc với nhau.

Giải (***Áp dụng cách 7***)

Do hình thoi có 4 cạnh bằng nhau và các cặp cạnh đối diện song nhau từng đôi một nên 2 đường chéo chia hình thoi thành 4 tam giác bằng nhau (g.c.g)

⇒ 2 đường chéo cắt nhau ở trung điểm. (AO = OC; BO = OD)

Dễ dàng thấy trong TG cân ABC thì BO vừa là trung tuyến vừa là trung trực của cạnh AC

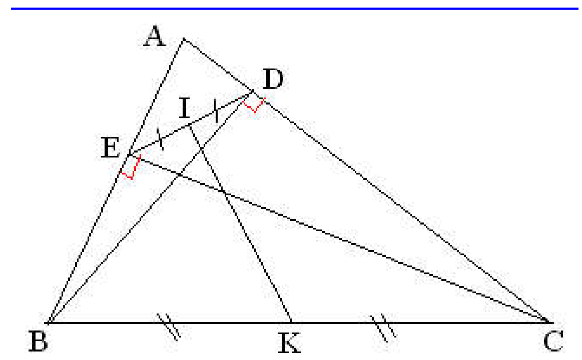
⇒ BO ⊥ AC ⇒ BD ⊥ AC (ĐPCM)

✪ Bài toán *4*

Cho ΔABC, các đường cao BD và CE.

Gọi I là trung điểm của DE, K là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng: KI ⊥ ED?

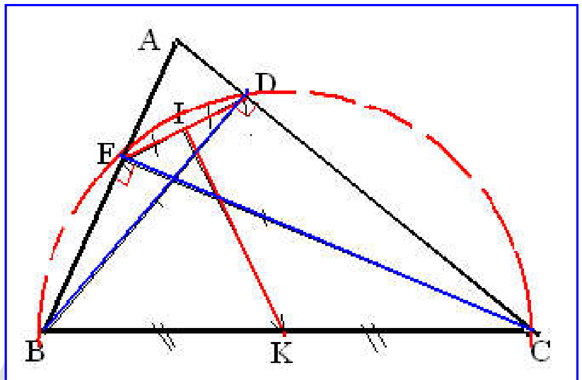


Giải ; (***Bài này chỉ cần CM 1 trong 2 cách sau:*** **)**

a/ / CM theo cách thứ 4

Theo GT có:

$\angle BEC = 90^0$ và $\angle BDC = 90^0$



Chứng minh theo cách 4

Hai góc vuông cùng chắn BC nên chúng nội tiếp trong đường tròn đường kinh BC.
Vì K là trung điểm của BC nên K chính là tâm của đường tròn mà ED là 1 dây cung.

Vì I là trung điểm của dây cung ED nên

➔ Có **KI** $\perp$ **AD** (ĐPCM)

b/ CM theo cách thứ 7

* Nối DK, trong ΔBDC có: [1]

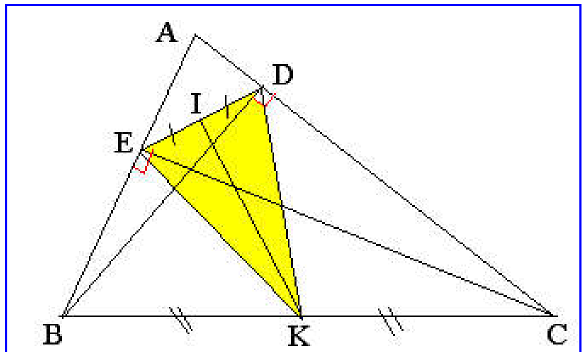
DK là đường trung tuyến $\Rightarrow DK = \frac{1}{2}BC$

* Nối EH; Trong ΔBEC có: [2]

EK là đường trung tuyến $\Rightarrow EK = \frac{1}{2}BC$

Từ [1] và [2], suy ra: DK = EK.

$\Rightarrow$ ΔEKD cân tại K.



Chứng minh theo cách 7

* Do I là trung điểm của DE (gt)

➔ KI là trung tuyến đồng thời là đường cao và dường trung trực tại cạnh ED của ΔEKD

$\Rightarrow$ **KI** $\perp$ **ED** (đpcm)

<u>Nhận xét</u>:

CM theo cách thứ 4 gọn hơn và không cần thiết phải kẻ thêm đường phụ

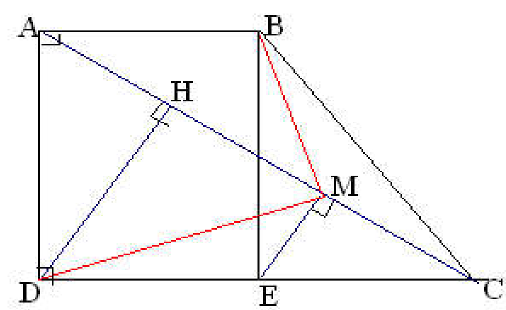
* * *

✪ Bài toán 5

Cho hình thang vuông ABCD, có CD = 2AB; $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^o$

Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống AC và M là trung điểm của HC. Chứng minh rằng đường thẳng qua DM vuông góc với đường thẳng qua BM.

Giải (*Áp dụng cách* 2 và **6)**



Kẻ BE $\perp$ CD (E $\in$ CD).

Vì CD = 2AB nên AB = DE = EC.

Hay E là trung điểm của CD.

* Xét ΔDHC có EM là đường trung bình

$\Rightarrow$ EM // DH $\Rightarrow$ EM $\perp$ AC (Vì DH $\perp$ AC).

* Xét tứ giác MADE có $\widehat{ADC} = 90^0$ và $\widehat{AME} = 90^0$

$\Rightarrow$Tứ giác MADE nội tiếp đường trong đường kính AE.

Tức là bốn điểm M, A, D, E nằm trên một đường tròn. (1)

* Xét tứ giác ABED có: $\widehat{ADE} = 90^0$ và AB = DE $\Rightarrow$ Tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ Bốn điểm A, B, E, D nằm trên một đường trong đường kính AE. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: M thuộc đường tròn đường kính AE.

Ta có: Tứ giác ABMD nội tiếp.

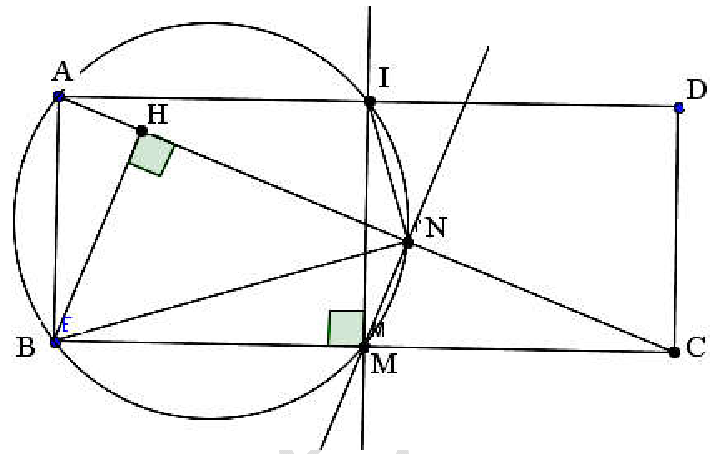
Mà $\widehat{BAD} = 90^0$ $\Rightarrow \widehat{BMD} = 90^0 \Rightarrow$ **BM** $\perp$ **DM**. (ĐPCM)

✪ Bài toán 6 :

Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. I và N lần lượt là trung điểm của AD và HC.

Chứng minh: BN $\perp$ IN.

(Đề tương tự đề 4 trên)

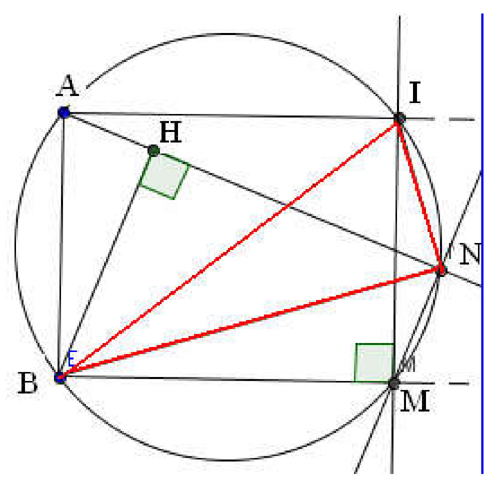


Giải

Gọi M là trung điểm của BC

Có IM là đường TB của hình chữ nhật ABCD (I là trung điểm BC, M là trung điểm AD)

$\Rightarrow$ IM // AB $\Rightarrow \widehat{BMI} = 90^o$



Có N là trung điểm của HC, M là trung điểm của BC

MN là đường TB của ΔHBC

$\Rightarrow$ MN // BH $\Rightarrow$ MN $\perp$ HC $\Rightarrow \widehat{ANM} = 90^o$

* Xét tứ giác ABMN có 2 góc đối diện:

$\widehat{ABM} + \widehat{ANM} = 90^o + 90^o = 180^o$

$\Rightarrow$ ABMN là tứ giác nội tiếp (1)

Xét tứ giác ABMI có 3 góc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{M} = 90^o$

$\Rightarrow$ABMI là hình chữ nhật hay ABMI cũng là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) (2) ta có:

Năm điểm A, I, N, M, B cùng thuộc một đường tròn đường kính AM và BI.

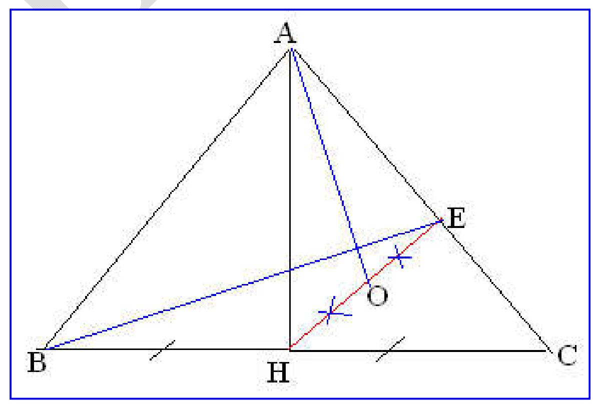
$\Rightarrow$ Tứ giác AINB là tứ giác nội tiếp có 2 góc đối nhau cùng chắn 1đường kính là BI

$\Rightarrow \widehat{BNI} = \widehat{BAI} = 90^o$ $\Rightarrow$ **BN** $\perp$ **IN** (đpcm).

✪ Bài toán 7:

Cho tam giác cân ABC, gọi H là trung điểm của BC và E là hình chiếu của H trên AC.

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HE. Chứng minh AO vuông góc với BE.



Giải ***"Cách 2 và 3"***

Lấy K là trung điểm của EC;

Nối HK $\Rightarrow$ HK là đường trung bình của ΔBEC

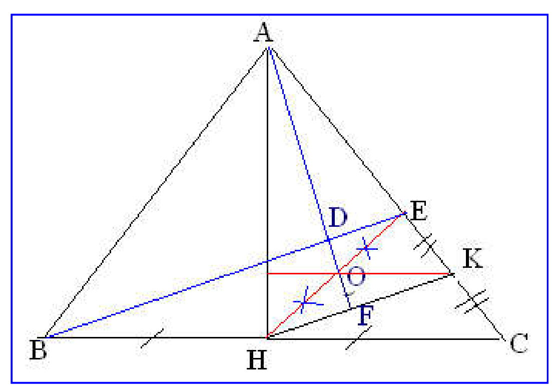
nên HK // EB (1)

Trong ΔEHC, ta có: OK cũng là đường trung bình nên OK // HC. (2)

Mà AH $\perp$ HC (giả thiết) (3)

Từ (2) và (3), suy ra: OK $\perp$ AH (*)

Ta lại có: HE $\perp$ AC (vì E là hình chiếu của H trên AC) (**)



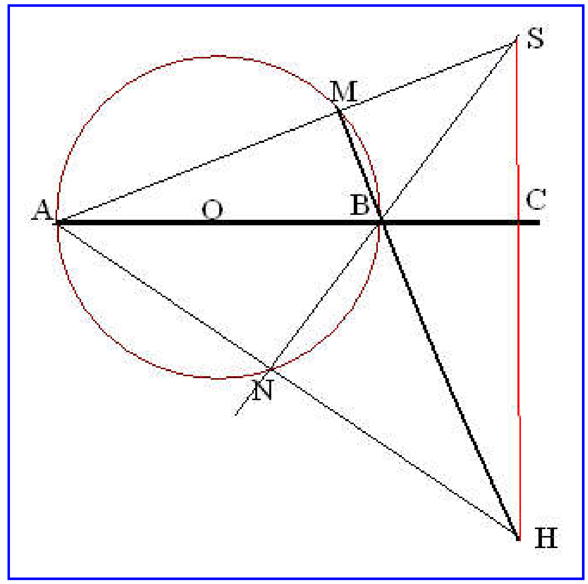
Từ (*) và (**), suy ra: O là trực tâm của ΔAHK

$\Rightarrow$ AO $\perp$ HK (4)

Từ (1) và (4), suy ra: AO $\perp$ BE (điều phải chứng minh)

Nhận xét: Không thể trực tiếp chứng minh AO $\perp$ BE mà phải kẻ thêm 1 số đường trung gian. Sau đó tìm các mối liên hệ, áp dụng "Cách 2 và 3" để CM

✪ **Bài toán 8**: Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. S là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. SA và SB lần lượt cắt đường tròn tai M. N. Gọi H giao điểm của BM và AN. Chứng minh rằng SH $\perp$ AB.



Giải (Áp dụng Cách 3)

Theo đề ta có:

$\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\widehat{ANB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét ΔSAB có AN, BM là hai đường cao.

Mà H là giao điểm của AN và BM

$\Rightarrow$ **H** là trực tâm của ΔSAB

SH thuộc đường cao thứ ba của ΔSAB.

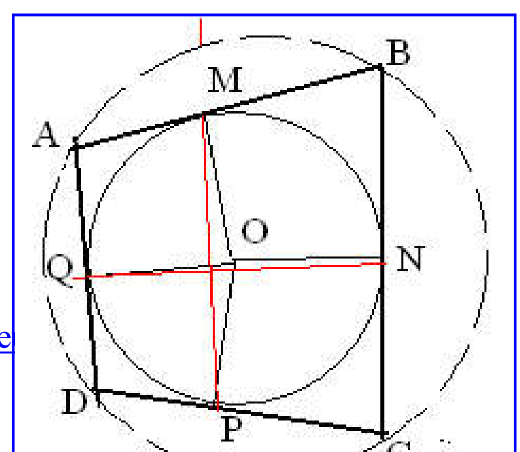
Vậy SH $\perp$ AB.

✪ **Bài toán 9**

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đồng thời ngoại tiếp đường tròn khác có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác đã cho. Chứng minh rằng MP $\perp$ NQ

Giải: Gọi (O) là đường tròn nội tiếp tứ giác và (O') là đường tròn ngoại tiếp tứ giác, ta có:

$\hat{B} = \frac{1}{2}(sd\,\widehat{MPQN} - sd\,\widehat{MnN})$ (góc có đỉnh ngoài đường tròn)



$\widehat{D} = \frac{1}{2}(sd\,\overparen{PNMQ} - sd\,\overparen{PkQ})$ (góc có đỉnh ngoài đường tròn)

$\widehat{D} + \widehat{B} = 180^o$ (tứ giác ABCD nội tiếp (O’)

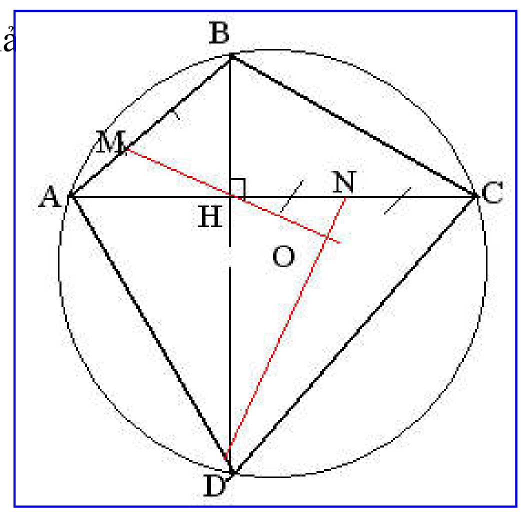
$\Rightarrow \frac{1}{2}(sd\,\overparen{MPQN} - sd\,\overparen{MnN}) + \frac{1}{2}(sd\,\overparen{PNMQ} - sd\,\overparen{PkQ}) = 180^0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(2\overparen{PIN} - 2\overparen{MmQ}) = 180^0 \Rightarrow \overparen{PIN} - \overparen{MmQ} = 180^0$

Mà $\overparen{MIQ} + \overparen{PIN} = 90^o \Rightarrow$ MP$\perp$ NQ

✪ **Bài toán 10**: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn O, AC $\perp$ BD tại H. Trên AB lấy điểm M ($M \in AB$) sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$. Gọi N là trung điểm HC. CMR: $DN \perp MH$

Giải (đây là bài hay nhưng khó vì MH và DN không có liên hệ trực tiếp; do đó phải kẻ thêm 1 số đường phụ, Áp dụng tổng hợp các cách giả



* Lấy $E \in HD$ sao cho HE = HB;

Nối CE và kéo dài cho cắt AC ở F

* Lấy K là trung điểm HE, (EK = KH).

Từ giả thiết ABCD nội tiếp $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{D}_1$ (1)

Dễ thấy ΔBCE cân tại C vì có CH vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ (2)

* Từ (1), (2) suy ra $\hat{C}_2 = \hat{D}_1$

$\Rightarrow$ Tứ giác CHDF nội tiếp được đường tròn

$\Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{CHD} \Rightarrow$ CE ⊥ AD (3)

Có KN là đường trung bình của ΔHEC ⇒ KN//CE.

Từ (3) ⇒ KN ⊥AD

* Xét ΔAND có DK ⊥AN (nằm trên 2 đường chéo NK⊥AD

(vì NK//CE mà CE ⊥ AD)

⇒ K là trực tâm của ΔAND ⇒ AK⊥ DN (4)

Từ giả thiết và cách lấy E, K ta có: $\dfrac{BM}{MA} = 2 = \dfrac{BH}{HK}$

⇒ MH// AK (theo định lý Thalet đảo) (5)

Từ (4), (5) suy ra MH ⊥DN (đpcm).