

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN ĐẠI SỐ 9

CHƯƠNG I: CĂN BẬC HAI - CĂN BẬC BA

I. CĂN BẬC HAI - CĂN THỨC BẬC HAI

1. Căn bậc hai số học

- Căn bậc hai của một số không âm a là số x sao cho $x^2 = a$.
- ▣ Số dương a có đúng hai căn bậc hai là hai số đối nhau: Số dương kí hiệu là \sqrt{a} , số âm kí hiệu là $-\sqrt{a}$.
- ▣ Số 0 có đúng một căn bậc hai là chính số 0, ta viết $\sqrt{0} = 0$.
- ▣ Với số dương a , số \sqrt{a} là căn bậc hai số học của a . Số 0 cũng là căn bậc hai số học của 0
- ▣ Với hai số không âm a, b , ta có: $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

2. Căn thức bậc hai

- ▣ Với A là một biểu thức đại số, ta gọi \sqrt{A} là căn thức bậc hai của A .
 \sqrt{A} xác định (hay có nghĩa) khi A lấy giá trị không âm.
- ▣ $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

DẠNG 1: TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ \sqrt{A} CÓ NGHĨA

Phương pháp:

- ▣ \sqrt{A} có nghĩa $\Leftrightarrow A \geq 0$
- ▣ $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow A > 0$
- ▣ $\frac{f(x)}{g(x)}$ có nghĩa khi $g(x) \neq 0$
- ▣ $\sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ có nghĩa khi $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ và $g(x) \neq 0$

▣ **Chú ý:** Nếu bài yêu cầu tìm TXĐ thì sau khi tìm được điều kiện x , các em biểu diễn dưới dạng tập hợp.

▣ Nếu $|f(x)| \geq a$ thì $f(x) \geq a$ hoặc $f(x) \leq -a$. (với $a > 0$)

▣ Nếu $|f(x)| \leq a$ thì $-a \leq f(x) \leq a$. (với $a > 0$)

Bài 1. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{-3x}$

b) $\sqrt{4-2x}$

c) $\sqrt{-3x+2}$

d) $\sqrt{3x+1}$

e) $\sqrt{9x-2}$

f) $\sqrt{6x-1}$

HD:

- a) Biểu thức có nghĩa khi: $-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$. Các câu khác làm tương tự:
 b) $x \leq 2$ c) $x \leq 2/3$ d) $x \geq -1/3$ e) $x \geq 2/9$ f) $x \geq 1/6$.

Bài 2. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ b) $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ c) $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$
 d) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ e) $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ f) $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$

HD:

a) Biểu thức có nghĩa khi: $\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

b) Biểu thức có nghĩa khi: $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq 2$

c) Biểu thức có nghĩa khi: $\begin{cases} x^2-4 \neq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x > 2$

d) $x < \frac{3}{2}$ e) $x > -\frac{3}{2}$

f) Biểu thức có nghĩa khi: $x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Bài 3. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{x^2+1}$ b) $\sqrt{4x^2+3}$ c) $\sqrt{9x^2-6x+1}$
 d) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ e) $\sqrt{-|x+5|}$ f) $\sqrt{-2x^2-1}$

HD:

a) Biểu thức có nghĩa khi: $x^2+1 \geq 0$ (luôn đúng) Suy ra: $x \in R$

b) $x \in R$ c) $x \in R$ d) $x=1$ e) $x=-5$

f) Vì $-2x^2-1 < 0$ với mọi x nên không có giá trị nào của x để biểu thức có nghĩa

Bài 4. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{4-x^2}$ b) $\sqrt{x^2-16}$ c) $\sqrt{x^2-3}$
 d) $\sqrt{x^2-2x-3}$ e) $\sqrt{x(x+2)}$ f) $\sqrt{x^2-5x+6}$

HD:

a) $|x| \leq 2$ b) $|x| \geq 4$ c) $|x| \geq \sqrt{3}$ d) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 3$
 e) $x \leq -2$ hoặc $x \geq 0$ f) $x \leq 2$ hoặc $x \geq 3$

Bài 5. Với giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa:

a) $\sqrt{|x|-1}$

b) $\sqrt{|x-1|-3}$

c) $\sqrt{4-|x|}$

d) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{9-12x+4x^2}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}$

HD:

a) $|x| \geq 1$ b) $x \leq -2$ hoặc $x \geq 4$ c) $|x| \leq 4$ d) $x \geq 1$ e) $x \neq \frac{3}{2}$ f) $x \geq 1$

DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Phương pháp: Các em dùng hằng đẳng thức 1 và 2 trong 7 hằng đẳng thức, biến đổi biểu thức trong căn đưa về dạng $\sqrt{A^2}$ rồi áp dụng công thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $-0,8\sqrt{(-0,125)^2}$

b) $\sqrt{(-2)^6}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$

d) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2}$

e) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\right)^2}$

f) $\sqrt{(0,1-\sqrt{0,1})^2}$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}$

b) $\sqrt{(5-2\sqrt{6})^2} - \sqrt{(5+2\sqrt{6})^2}$

c) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$

e) $\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2}$

f) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-5)^2}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

b) $\sqrt{7-2\sqrt{10}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}$

c) $\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{4+2\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} + \sqrt{22-12\sqrt{2}}$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

b) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$$d) \sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$$

$$e) \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}} + \sqrt{1 - \sqrt{3 - \sqrt{13 - 4\sqrt{3}}}}$$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

$$a) -0,8\sqrt{(-0,125)^2} = -0,8|-0,125| = -0,8 \cdot 0,125 = -0,1$$

$$b) 8 \quad c) 2 - \sqrt{3} \quad d) 3 - 2\sqrt{2} \quad e) \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \quad f) \sqrt{0,1} - 0,1$$

Bài 2:

$$a) \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3 + 2\sqrt{2})^2} = |3 - 2\sqrt{2}| + |3 + 2\sqrt{2}| = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) = 6$$

$$b) -4\sqrt{6} \quad c) 1 \quad d) 4 \quad e) 2\sqrt{5} \quad f) 2\sqrt{2} - 4$$

Bài 3:

$$a) \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{3} + \sqrt{2}| - |\sqrt{3} - \sqrt{2}| = 2\sqrt{2}$$

$$b) -2\sqrt{2} \quad \text{Chú ý: } \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2}$$

$$c) 2\sqrt{3} \quad \text{Chú ý: } \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$$

$$d) 3\sqrt{5} \quad \text{Chú ý: } \sqrt{24 + 8\sqrt{5}} = \sqrt{(2 + 2\sqrt{5})^2}; \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2}$$

$$e) 4 \quad \text{Chú ý: } \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}; \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + 2\sqrt{2})^2}$$

$$f) 2\sqrt{2} \quad \text{Chú ý: } \sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}; \sqrt{22 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)^2}$$

Bài 4: Ta thực hiện từ trong ra ngoài:

$$a) \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2}}} =$$

$$\sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - |2\sqrt{5} - 3|}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{\sqrt{5} - |\sqrt{5} - 1|} = 1.$$

$$b) \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{(2\sqrt{2} + 1)^2}}} =$$

$$\sqrt{13 + 30\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{13 + 30\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \sqrt{13 + 30|\sqrt{2} + 1|} =$$

$$\sqrt{43 + 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} + 5)^2} =$$

$$3\sqrt{2} + 5.$$

$$c) (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1.$$

$$d) \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}} + \sqrt{3 + \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} =$$

$$\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = 2\sqrt{3}$$

$$e) \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

DẠNG 3: SO SÁNH CĂN BẬC 2

Phương pháp:

- So sánh với số).
- Bình phương hai vế.
- Đưa vào (đưa ra) ngoài dấu căn.
- Dựa vào tính chất: nếu $a > b \geq 0$ thì $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

BÀI TẬP: So sánh:

Bài 1: $\sqrt{22}$ và $\sqrt{27}$; 11 và $\sqrt{121}$; 7 và $\sqrt{50}$; 6 và $\sqrt{33}$;

Bài 2:

a) 2 và $\sqrt{147}$ b) $-3\sqrt{5}$ và $-5\sqrt{3}$ c) 21, $2\sqrt{7}$, $15\sqrt{3}$, $-\sqrt{123}$

d) $2\sqrt{15}$ và $\sqrt{59}$ e) $2\sqrt{2} - 1$ và 2 f) 6 và $\sqrt{41}$ g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và 1 h) $-\frac{\sqrt{10}}{2}$ và -

$$2\sqrt{5}$$

i) $\sqrt{6} - 1$ và 3 j) $2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$ và 1 k) $\frac{\sqrt{8}}{3}$ và $\frac{3}{4}$

l) $6\sqrt{\frac{1}{4}}$, $4\sqrt{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{132}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{15}{5}}$

m) $-2\sqrt{6}$ và $-\sqrt{23}$ n) $2\sqrt{6} - 2$ và 3 o) $28\sqrt{2}$, $\sqrt{14}$, $2\sqrt{147}$, $36\sqrt{4}$

q) $\sqrt{9}$ và $\sqrt{25} - \sqrt{16}$ r) $\sqrt{111} - 7$ và 4 p) -27 , $4\sqrt{3}$, $16\sqrt{5}$, $21\sqrt{2}$

DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp: Các em dùng hằng đẳng thức 1 và 2 trong 7 hằng đẳng thức, biến đổi biểu thức trong căn đưa về dạng $\sqrt{A^2}$ rồi áp dụng công thức:

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

Chú ý: Xét các trường hợp $A \geq 0$, $A < 0$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $x+3+\sqrt{x^2-6x+9}$ ($x \leq 3$)

b) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2}$ ($-2 \leq x \leq 0$)

c) $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$ ($x > 1$)

d) $|x-2|+\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ ($x < 2$)

Bài 2. * Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{1-4a+4a^2} - 2a$ b) $B = x - 2y - \sqrt{x^2 - 4xy + 4y^2}$ c) $C = x^2 + \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$

d) $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$ e) $E = \frac{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}}{x^2 - 2}$ f) $F = \sqrt{(x-4)^2} + \frac{x-4}{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}$

Bài 3. Cho biểu thức $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$.

a) Với giá trị nào của x thì A có nghĩa?

b) Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$.

Bài 4. Cho 3 số dương x, y, z thỏa điều kiện: $xy + yz + zx = 1$. Tính:

$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $x+3+\sqrt{(x-3)^2} = x+3+|x-3| = x+3-(x-3) = 6$ (vì $x \leq 3$ nên $|x-3| = -(x-3)$)

b) 2 c) 1 d) $1-x$

Bài 2:

a) $A = \sqrt{(1-2a)^2} - 2a = |1-2a| - 2a$.

Nếu $1-2a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1/2$ thì $A = (1-2a) - 2a = 1-4a$

Nếu $1-2a < 0 \Leftrightarrow a > 1/2$ thì $A = -(1-2a) - 2a = -1$.

b) $B = x - 2y - |x - 2y|$: $B = 0$ nếu $x \geq 2y$; $B = 2x$ nếu $x < 2y$.

c) $C = x^2 + |x^2 - 4|$: $C = 2x^2 - 4$ nếu $|x| \geq 2$; $C = 4$ nếu $|x| \leq 2$.

d) $D = 2x - 1 - \frac{|x-5|}{x-5}$: Nếu $x > 5$ thì $D = 2x - 2$; Nếu $x < 5$ thì $D = 2x$.

e) $E = \frac{|x^2-2|}{x^2-2}$: Nếu $x^2 > 2$ hay $|x| > \sqrt{2}$ thì $E = 1$. Nếu $x^2 < 2$ hay $|x| < \sqrt{2}$ thì $E = -1$.

f) $F = |x-4| + \frac{x-4}{|x-4|}$: Nếu $x > 4$ thì $F = x - 3$; Nếu $x < 4$ thì $F = 3 - x$.

Bài 3: a) $x \leq -1$ hoặc $x \geq 1$ b) $A = 2$

Bài 4: $A = 2$. Chú ý: $1 + y^2 = (xy + yz + zx) + y^2 = (x + y)(y + z)$,

$$1 + z^2 = (y + z)(z + x), \quad 1 + x^2 = (z + x)(x + y)$$

Nên $A = x(y+z) + z(x+y) + y(x+z) = 2(xy + yz + zx) = 2$.

DẠNG 5: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp:

$$\boxed{A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B;}$$

$$\boxed{\sqrt{A} + \sqrt{B} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \text{ (hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}}$$

$$\boxed{\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}}$$

$$\boxed{|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}}$$

$$\boxed{|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \text{ hay } A = -B \end{cases}}$$

$$\boxed{|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \text{ hay } A = -B}$$

$$\boxed{|A| + |B| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\text{Chú ý: } \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B; \quad |A| = A \text{ khi } A \geq 0; \quad |a| = -A \text{ khi } A \leq 0.}$$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$

b) $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$

c) $\sqrt{1-12x+36x^2} = 5$

d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = 2$

e) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} - 1$

f) $\sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \frac{1}{4} - x$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{1-x}$

b) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3-x}$

c) $\sqrt{2x^2-3} = \sqrt{4x-3}$

d) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$

e) $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{x-3}$

f) $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x-5}$

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+x} = x$

b) $\sqrt{1-x^2} = x-1$

c) $\sqrt{x^2-4x+3} = x-2$

d) $\sqrt{x^2-1} - x^2 + 1 = 0$

e) $\sqrt{x^2-4} - x + 2 = 0$

f) $\sqrt{1-2x^2} = x-1$

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$ b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1$ c) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1$
d) $\sqrt{x^2 + x + \frac{1}{4}} = x$ e) $\sqrt{x^4 - 8x^2 + 16} = 2 - x$ f) $\sqrt{9x^2 + 6x + 1} = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

a) $|3x + 1| = |x + 1|$ b) $|x^2 - 3| = |x - \sqrt{3}|$ c) $\sqrt{9x^2 - 12x + 4} = \sqrt{x^2}$
d) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$ b) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} + |x + 2| = 0$ c) $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 1} = 0$
d) $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $x \leq 3$ b) $x \leq \frac{5}{2}$ c) $x = 1; x = -\frac{2}{3}$ d) $x = 2$ e) $x \geq 2$ f) $x \leq \frac{1}{4}$

Bài 2:

a) $x = -\frac{4}{3}$ b) $x = \pm\sqrt{3}$ c) $x = 2$ d) vô nghiệm e) $x = 3$ f) vô nghiệm

Bài 3:

a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) vô nghiệm d) $x = \pm 1; x = \pm\sqrt{2}$ e) $x = 2$ f) vô nghiệm

Bài 4:

a) $x = 1; x = -2$ b) vô nghiệm c) $x = 1$ d) vô nghiệm e) $x = 2; x = -3; x = -1$
f) $x = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}; x = \frac{\sqrt{2} - 4}{3}$

Bài 5:

a) $x = 0; x = -\frac{1}{2}$ b) $x = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3} + 1; x = -\sqrt{3} - 1$ c) $x = 1; x = \frac{1}{2}$ d) $x = 1; x = \frac{5}{3}$

Bài 6:

a) $x = -1$ b) vô nghiệm c) $x = -1$ d) $x = -2$

II. LIÊN HỆ GIỮA PHÉP KHAI PHƯƠNG VÀ PHÉP NHÂN, PHÉP CHIA

Phương pháp:

☐ Khai phương một tích: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

Nhân các căn bậc hai: $\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{A \cdot B} \quad (A \geq 0, B \geq 0)$

☐ Khai phương một thương: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

Chia hai căn bậc hai: $\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \quad (A \geq 0, B > 0)$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$ b) $2\sqrt{3}(\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - \sqrt{75})$ c) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

d) $(1 + \sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$ e) $(\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2$

f) $(\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{7}} - \sqrt{\sqrt{11} - \sqrt{7}})^2$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ b) $\sqrt{21 - 12\sqrt{3}} - \sqrt{3}$

c) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 2)\sqrt{\sqrt{3} + 2}$ d) $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

e) $\sqrt{13 - \sqrt{160}} - \sqrt{53 + 4\sqrt{90}}$ f) $\sqrt{6 - 2\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12} + \sqrt{18 - \sqrt{128}}}}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau:

a) $2\sqrt{5} - \sqrt{125} - \sqrt{80} + \sqrt{605}$ b) $\sqrt{15 - \sqrt{216}} + \sqrt{33 - 12\sqrt{6}}$ c)

$\sqrt{8\sqrt{3}} - 2\sqrt{25\sqrt{12}} + 4\sqrt{\sqrt{192}}$

d) $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ e) $\sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ f) $(\sqrt{2} + 1)^3 - (\sqrt{2} - 1)^3$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{10 + 2\sqrt{10}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{8}{1 - \sqrt{5}}$ b) $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{48}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{27}}{\sqrt{30} + \sqrt{162}}$ c) $\sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}}$

d) $\frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$ f) $\frac{(\sqrt{5} + 2)^2 - 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$

b) $B = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$

c) $C = \sqrt{3 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $-13\sqrt{3}$ b) 36 c) $11 - 4\sqrt{6}$ d) $2 + 2\sqrt{3}$ e) 10 f) $2\sqrt{11} - 4$

Bài 2:

Chú ý: $\sqrt{2 \pm \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3} - 3$ c) -2 d) 2 e) $-4\sqrt{5}$ f) $\sqrt{3} - 1$

Bài 3:

a) $4\sqrt{5}$ b) $\sqrt{6}$ c) 0 d) 2 e) $\sqrt{10}$ f) 14

Bài 4:

a) -2 b) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) 4 d) 1

Bài 5:

Chứng tỏ $A < 0, B > 0, C > 0$. Tính A^2, B^2, C^2 □ $A = -\sqrt{6}; B = \sqrt{5} + 1, C = \sqrt{10}$

DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài 1. Rút gọn các biểu thức:

a) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{\sqrt{35} - \sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{15}}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}$

c) $\frac{2\sqrt{15} - 2\sqrt{10} + \sqrt{6} - 3}{2\sqrt{5} - 2\sqrt{10} - \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + \sqrt{16}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$

e) $\frac{x + \sqrt{xy}}{y + \sqrt{xy}}$

f) $\frac{\sqrt{a} + a\sqrt{b} - \sqrt{b} - b\sqrt{a}}{ab - 1}$

Bài 2. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

b) $\sqrt{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} + 1}}$ ($x \geq 0$)

c) $\frac{x-1}{\sqrt{y}-1} \sqrt{\frac{(y-2\sqrt{y}+1)^2}{(x-1)^4}}$ ($x \neq 1, y \neq 1, y > 0$)

Bài 3. Rút gọn và tính:

a) $\sqrt{\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{b}+1}} : \sqrt{\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{a}+1}}$ với $a = 7,25; b = 3,25$ b) $\sqrt{15a^2 - 8a\sqrt{15} + 16}$ với $a = \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$
 c) $\sqrt{10a^2 - 4a\sqrt{10} + 4}$ với $a = \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ d) $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{a^2 - 1}} - \sqrt{a^2 - 2\sqrt{a^2 - 1}}$ với $a = \sqrt{5}$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$ d) $1+\sqrt{2}$. Tách $\sqrt{16} = \sqrt{4} + \sqrt{4}$
 e) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ f) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-1}$

Bài 2:

a) \sqrt{xy} b) $\frac{|\sqrt{x}-1|}{\sqrt{x}+1}$ c) $\frac{1}{1-x}$ nếu $0 < y < 1$ và $\frac{1}{x-1}$ nếu $y > 1$

Bài 3: a) $\sqrt{\frac{a-1}{b-1}}; \frac{5}{3}$ b) 4 c) 5 d) 2

DẠNG 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$ b) $\frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x-1}} = 2$ c) $\sqrt{4x^2-9} = 2\sqrt{2x+3}$

d) $\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}} = \sqrt{7x+5}$ e) $\sqrt{4x-20} + 3\sqrt{\frac{x-5}{9}} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-45} = 4$

ĐS: a) $x = \frac{1}{2}$ b) vô nghiệm c) $x = -\frac{3}{2}; x = \frac{7}{2}$ d) $x = 6$ e) $x = 9$

DẠNG 4: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1. So sánh các số:

a) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1 b) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ c) $\sqrt{2005} + \sqrt{2007}$ và $\sqrt{2006}$

Bài 2. Cho các số không âm a, b, c . Chứng minh:

a) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ b) $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ c) $a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

d) $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ e) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

b) $B = \sqrt{6-x} + \sqrt{x+2}$

c) $C = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

ĐÁP SỐ

Bài 1:

Bài 2:

Bài 3:

a) $A = 2 \Leftrightarrow x = 3$

b) $B = 4 \Leftrightarrow x = 2$

c) $C = 2 \Leftrightarrow x = 1$

III. BIẾN ĐỔI ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

☐ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = -A\sqrt{B}$

☐ Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ + Với $A < 0$ và $B \geq 0$ thì $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$

☐ Với $A, B \geq 0$ và $B \neq 0$ thì $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$ + Với $B > 0$ thì $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$

☐ Với $A \geq 0$ và $A \neq B^2$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm B}} = \frac{C(\sqrt{A \mp B})}{A - B^2}$

☐ Với $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$ thì $\frac{C}{\sqrt{A \pm \sqrt{B}}} = \frac{C(\sqrt{A \mp \sqrt{B}})}{A - B}$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt{125} - 4\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - \sqrt{80}$

b) $(\sqrt{99} - \sqrt{18} - \sqrt{11})\sqrt{11} + 3\sqrt{22}$

c) $2\sqrt{\frac{27}{4}} - \sqrt{\frac{48}{9}} - \frac{2}{5}\sqrt{\frac{75}{16}}$

d) $3\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{49}{2}} + \sqrt{\frac{25}{18}}$

$$e) \left(1 + \frac{5 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}}\right) \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} + 1\right)$$

$$f) \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

$$a) \frac{\sqrt{7} - 5}{2} - \frac{6 - 2\sqrt{7}}{4} + \frac{6}{\sqrt{7} - 2} - \frac{5}{4 + \sqrt{7}}$$

$$b) \frac{2}{\sqrt{6} - 2} + \frac{2}{\sqrt{6} + 2} + \frac{5}{\sqrt{6}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$$

$$d) \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}\right) : \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$e) \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{5}{12} - \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$f) \frac{2\sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

ĐÁP SỐ:

Bài 1:

$$a) -5\sqrt{5} \quad b) 22 \quad c) \frac{7\sqrt{3}}{6} \quad d) -\frac{5\sqrt{2}}{12} \quad e) -4 \quad f) 2\sqrt{3}$$

Bài 2:

$$a) \frac{32\sqrt{7} - 20}{9} \quad b) \frac{17\sqrt{6}}{6} \quad c) \frac{\sqrt{30}}{6} \quad d) -3 \quad e) \frac{\sqrt{3}}{2} \quad f) 1$$

DẠNG 2: RÚT GỌN BIỂU THỨC

Phương pháp: Đơn giản biểu thức rồi thay số.

Bài 1. Rút gọn và tính giá trị biểu thức:

$$a) A = \frac{x - 11}{\sqrt{x - 2} - 3}, \quad x = 23 - 12\sqrt{3}$$

$$b) B = \frac{1}{2(1 + \sqrt{a})} + \frac{1}{2(1 - \sqrt{a})} - \frac{a^2 + 2}{1 - a^3}, \quad a = \sqrt{2}$$

$$c) C = \frac{a^4 - 4a^2 + 3}{a^4 - 12a^2 + 27}, \quad a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$d) D = \frac{1}{\sqrt{h + 2\sqrt{h} - 1}} + \frac{1}{\sqrt{h - 2\sqrt{h} - 1}},$$

$$h = 3$$

$$e) E = \frac{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 4}}}{\sqrt{x^2 - 4} + x + 2}, \quad x = 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$f) F = \left(\frac{3}{\sqrt{1 + a}} + \sqrt{1 - a}\right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1 - a^2}} + 1\right),$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

Truy cập Website hoc360.net – Tài liệu học tập miễn phí

$$ĐS: a) A = \sqrt{x-2} + 3 = 2\sqrt{3} \quad b) B = \frac{-1}{1+a+a^2} = \frac{\sqrt{2}-3}{7} \quad c) C = \frac{a^2-1}{a^2-9} = 5-2\sqrt{6}$$

$$d) D = \frac{2\sqrt{h-1}}{h-2} = 2\sqrt{2} \quad e) E = \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad f) F = \sqrt{1-a} = \sqrt{3}-1$$

DẠNG 3: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1. Giải các phương trình sau:

$$a) \sqrt{x-1} + \sqrt{4x-4} - \sqrt{25x-25} + 2 = 0 \quad b) \frac{1}{2}\sqrt{x-1} - \frac{3}{2}\sqrt{9x-9} + 24\sqrt{\frac{x-1}{64}} = -17$$

$$c) \sqrt{9x^2+18} + 2\sqrt{x^2+2} - \sqrt{25x^2+50} + 3 = 0 \quad d) 2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$$

$$e) (x+1)(x+4) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6$$

$$ĐS: a) x=2 \quad b) 290 \quad c) \text{ vô nghiệm} \quad d) x=1 \pm 2\sqrt{2} \quad e) x=2; x=-7$$

DẠNG 4: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{2}+1)^n + (\sqrt{2}-1)^n$ (với n nguyên dương).

a) Tính $S_2; S_3$.

b) Chứng minh rằng: Với mọi m, n nguyên dương và $m > n$, ta có: $S_{m+n} = S_m \cdot S_n - S_{m-n}$

c) Tính S_4 .

Bài 2. Cho biểu thức: $S_n = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^n + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^n$ (với n nguyên dương).

a) Chứng minh rằng: $S_{2n} = S_n^2 - 2$ b) Tính S_2, S_4 .

Bài 3. Cho biểu thức: $S_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$ (với n nguyên dương).

a) Chứng minh rằng: $S_{3n} + 3S_n = S_n^3$ b) Tính S_3, S_9 .

ĐÁP SỐ:

Bài 1:

$$a) S_2 = 6; S_3 = 10\sqrt{2} \quad b) \text{ Chứng minh } S_{m+n} + S_{m-n} = S_m S_n \quad c) S_4 = 34$$

Bài 2:

$$a) \text{ Sử dụng hằng đẳng thức } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad b) S_1 = 2\sqrt{3}; S_2 = 10; S_4 = 98$$

Bài 3:

- a) Sử dụng hằng đẳng thức $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$. Chứng minh $S_{3n} = S_n^3 - 3S_n$.
b) $S_1 = 4; S_3 = 61; S_9 = 226798$.

IV. RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN THỨC BẬC HAI

Để rút gọn biểu thức có chứa căn thức bậc hai, ta cần biết vận dụng thích hợp các phép biến đổi đơn giản như: đưa thừa số ra ngoài dấu căn, đưa thừa số vào trong dấu căn, khử căn ở mẫu và trục căn thức ở mẫu để làm xuất hiện các căn thức bậc hai có cùng một biểu thức dưới dấu căn.

Trong tất cả các bài toán rút gọn, nếu bài chưa cho điều kiện của x thì các em phải đi tìm điều kiện trước khi thực hiện rút gọn.

Chú ý: Sau khi rút gọn biểu thức A , ta thường có các câu hỏi đi kèm sau:

1. **Tính giá trị của A tại $x = x_0$:** Thông thường các em phải biến đổi x_0 rồi mới thay vào A .
2. **Tìm x để $A = a; A > a; A < a$:** Với bài toán này, ta cho $A = a; A < a \dots$ rồi tìm x , các em chú ý phải so sánh x với điều kiện trước khi kết luận.
3. **Tìm GTLN, GTNN:**
4. **Chứng minh $A > a; A < a$ (hoặc so sánh A với a):** Các em biến đổi tương đương để đưa về biểu thức đúng.
5. **Tìm x nguyên để A nguyên:**

Bài 1. Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$$

- a) Tìm x để biểu thức A có nghĩa. b) Rút gọn biểu thức A . c) Tìm x để $A = 2$.

ĐS: a) $x \geq 0, x \neq 4$ b) $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ c) $x = 16$

Bài 2. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{(1-x)^2}{2}$$

- a) Rút gọn A nếu $x \geq 0, x \neq 1$. b) Tìm x để A dương c) Tìm giá trị lớn nhất của A .

ĐS: a) $A = \sqrt{x} - x$ b) $0 < x < 1$ c) $\max A = \frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$.

Bài 3. Cho biểu thức:
$$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn A . b) Tìm x để $A < 1$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}}$ b) $0 < x < 9; x \neq 4$.

Bài 4. Cho biểu thức: $A = \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} + \left[\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right] \left[\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} + \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} \right]$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = 7$

c) Tìm a để $A > 6$.

ĐS: a) $A = \frac{2a+2\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}}$ b) $a = 4; a = \frac{1}{4}$ c) $a > 0, a \neq 1$.

Bài 5. Cho biểu thức: $A = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3+\sqrt{x}}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A = \frac{1}{2}$.

ĐS: a) $A = \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ b) $x = \frac{1}{121}$.

Bài 6. Cho biểu thức: $A = \left[1 - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6} \right]$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm x để $A < 0$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{x}-2}{1+\sqrt{x}}$ b) $0 \leq x < 4$.

Bài 7. Cho biểu thức: $A = \frac{a^2+\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}+1} - \frac{2a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = 2$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

ĐS: a) $A = a - \sqrt{a}$ b) $a = 4$ c) $\min A = -\frac{1}{4}$ khi $a = \frac{1}{4}$.

Bài 8. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \left(\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A < 0$.

c) Tìm a để $A = -2$.

ĐS: a) $A = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$ b) $a > 1$ c) $a = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho biểu thức: $A = 1 + \left(\frac{2a+\sqrt{a}-1}{1-a} - \frac{2a\sqrt{a}-\sqrt{a}+a}{1-a\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a-\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm a để $A = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$.

c) Chứng minh rằng $A > \frac{2}{3}$.

ĐS:

Bài 10. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left(\frac{25-x}{x+2\sqrt{x}-15} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right).$$

- a) Rút gọn A. b) Tìm x để $A < 1$.

ĐS: a) $A = \frac{5}{3+\sqrt{x}}$ b) $x > 4; x \neq 9; x \neq 25$.

Bài 11. Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right).$$

- a) Rút gọn A. b) Tìm a để $A > \frac{1}{6}$.

ĐS: a) $A = \frac{\sqrt{a}-2}{3\sqrt{a}}$ b) $a > 16$.

Bài 12. Cho biểu thức:
$$A = \left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right] : \left[\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right].$$

- a) Rút gọn A. b) Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3+\sqrt{8}}$. c) Tìm x để $A = \sqrt{5}$.

ĐS: a) $\frac{4x}{1-x^2}$ b) $x = -2$ c) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}; x = -\sqrt{5}$.

Bài 13. Cho biểu thức:
$$B = \left[\sqrt{x} + \frac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right] : \left[\frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}-x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \right].$$

- a) Rút gọn B. b) Tính giá trị của B khi $x = 3, y = 4 + 2\sqrt{3}$.

ĐS: a) $B = \sqrt{y} - \sqrt{x}$ b) $B = 1$.

Bài 14. Cho biểu thức:
$$B = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy}-2y} - \frac{2x}{x+\sqrt{x}-2\sqrt{xy}-2\sqrt{y}} \cdot \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn B. b) Tìm tất cả các số nguyên dương x để $y = 625$ và $B < 0,2$.

ĐS: a) $B = \frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $x \in \{2; 3; 4\}$.

Bài 15. Cho biểu thức:
$$B = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right] : \frac{\sqrt{x^3} + y\sqrt{x} + x\sqrt{y} + \sqrt{y^3}}{\sqrt{x^3y} + \sqrt{xy^3}}$$

- a) Rút gọn B. b) Cho $x, y = 16$. Xác định x, y để B có giá trị nhỏ nhất.

ĐS:

Bài 16. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}} \right) \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{3\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}} \right) : \frac{a-b}{a+\sqrt{ab}+b} \right]$$

- a) Rút gọn B. b) Tính B khi $a = 16, b = 4$.

ĐS:

Bài 17. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$$

a) Rút gọn B.

b) Chứng minh $B \geq 0$.

ĐS:

Bài 18. Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right).$$

a) Rút gọn B.

b) Tính giá trị của B nếu $a = 2 - \sqrt{3}$ và $b = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của B nếu $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$.

ĐS:

V. CĂN BẬC BA

☐ Căn bậc ba của một số a là số x sao cho $x^3 = a$.

☐ Mọi số a đều có duy nhất một căn bậc ba.

☐ $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$ ☐ $\sqrt[3]{A \cdot B} = \sqrt[3]{A} \cdot \sqrt[3]{B}$ ☐ Với $B \neq 0$ ta có: $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$

DẠNG 1: THỰC HIỆN PHÉP TÍNH

Phương pháp: Áp dụng công thức: $\sqrt[3]{a^3} = a; \quad (\sqrt[3]{a})^3 = a$

và các hằng đẳng thức: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Bài 1. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})}$

b) $\sqrt[3]{(4-2\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

c) $\sqrt[3]{-64} - \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{216}$

d) $(\sqrt[3]{4}+1)^3 - (\sqrt[3]{4}-1)^3$

e) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$

Bài 2. Thực hiện các phép tính sau:

a) $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

b) $B = \sqrt[3]{9+4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

c) $C = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$

d) $D = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$

ĐÁP SỐ:

Bài 1:

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}-1$ c) -3 d) $12\sqrt[3]{2}+2$ e) 5 .

Bài 2:

a) $A=1$. Chú ý: $2\pm\sqrt{5}=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3$

b) $B=3$. Chú ý: $9\pm 4\sqrt{5}=\left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3$

c) $C=1$. Chú ý: $26+15\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^3$

d) $D=1$. Đặt $a=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$, $b=\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$ \square $a^3-b^3=6$, $ab=\frac{5}{3}$. Tính D^3 .

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng, nếu: $ax^3 = by^3 = cz^3$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

thì $\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

Bài 2. Chứng minh đẳng thức:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z})\left[(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})^2 + (\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z})^2 + (\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x})^2\right]$$

ĐÁP SỐ:

Bài 1:

Đặt $ax^3 = by^3 = cz^3 = t$ \square $a = \frac{t}{x^3}$, $b = \frac{t}{y^3}$, $c = \frac{t}{z^3}$. Chứng tỏ $VT = VP = \sqrt[3]{t}$

Bài 2: Khai triển và rút gọn ta được về trái

DẠNG 3: SO SÁNH HAI SỐ

Phương pháp: $A < B \Leftrightarrow \sqrt[3]{A} < \sqrt[3]{B}$

Bài 1. So sánh:

a) $A = 2\sqrt[3]{3}$ và $B = \sqrt[3]{23}$ b) $A = 33$ và $B = 3\sqrt[3]{133}$ c) $A = 5\sqrt[3]{6}$ và $B = 6\sqrt[3]{5}$

ĐS: a) $A > B$ b) $A > B$ c) $A < B$

Bài 2. So sánh:

a) $A = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ và $B = 2\sqrt{5}$

ĐS: a) $A < B$. Chú ý: $20 \pm 14\sqrt{2} = (2 \pm \sqrt{2})^3$.

DẠNG 4: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp: $\sqrt[3]{A} = B \Leftrightarrow A = B^3$

Bài 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{2x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{2-3x} = -2$ c) $\sqrt[3]{x-1} + 1 = x$

d) $\sqrt[3]{x^3+9x^2} = x+3$ e) $\sqrt[3]{5+x} - x = 5$

ĐS: a) $x = 13$ b) $x = \frac{10}{3}$ c) $x = 0; x = 1; x = 2$ d) $x = -1$ e) $x = -5; x = -4; x = -6$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$ b) $\sqrt[3]{13-x} + \sqrt[3]{22+x} = 5$ c) $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}$

ĐS: Sử dụng phương pháp đặt 2 ẩn phụ, đưa về hệ phương trình.

a) $x = 3$ b) $x = -14; x = 5$ c) $x = 7$