Chuyên đề 1

CĂN THỨC

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CĂN THỨC

Kiến thức bổ sung :

1. Bất đẳng thức Côsi :

a . Với $a > 0, b > 0$ thì $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ (dấu bằng "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b$)

b . Với $a > 0, b > 0, c > o$ thì $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc}$

c . Với n các số không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thì $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}$

(dấu bằng "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

2 . Bất đẳng thức BuNhia-Côpxki :

a . Mỗi bộ có hai số (a_1,a_2), (b_1,b_2)

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 < (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$$

b . Mỗi bộ có n số $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 < (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

(dấu bằng "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

Quy ước : Nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0

A / CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI – HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$.

Bài 1 : Tìm x để các biểu thức sau có nghĩa :

a / $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ b / $\sqrt{x^2 + 2x + 3}$ c / $\sqrt{\sqrt{x-3} - 2}$ d / $\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$

Bài 2 : Cho $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

$B = \sqrt{x^2 + 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 10x + 25}$

a / Tìm x để A, B có nghĩa b / Rút gọn A, B c / Giải phương trình A + B = 5x

Bài 3 : Cho biểu thức $A = \sqrt{x - \sqrt{x^2 - 4x + 4}}$

a / Tìm điều kiện xác định của A b / Rút gọn A

Gợi ý giải :

a / Biến đổi $A = \sqrt{x - |x - 2|}$

Điều kiện để A có nghĩa :$x > x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > x2\text{Neáux} > 2 \\ x > x + 2\,\text{Neáux} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 1 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

b / Nếu x > 2 thì $A = \sqrt{x - (x - 2)} = \sqrt{2}$

Nếu $1 < x < 2$ thì $A = \sqrt{x - (2 - x)} = \sqrt{2x - 2}$

Bài 4 : Cho a, b là các số dương thỏa điều kiện : $a^2 = b + 3992$ và x, y, z là các số dương thỏa :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = b \end{cases}$$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P sau đây không phụ thuộc vào x, y, z

$$P = x\sqrt{\frac{(1996 + y^2)(1996 + z^2)}{1996 + x^2}} + y\sqrt{\frac{(1996 + z^2)(1996 + x^2)}{1996 + y^2}} + z\sqrt{\frac{(1996 + x^2)(1996 + y^2)}{1996 + z^2}}$$

Hướng dẫn :

Đặt $a = (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow a = (x^2 + y^2 + x^2) + 2\,(xy + yz + zx) \;= b + 2(xy + yz + zx)$

Do đó : $xy + yz + zx = \dfrac{a^2 - b}{2}$

Nên $xy + yz + zx = 1996$

Ta có : $1996 + x^2 = xy + yz + zx + x^2 \;= (x + y)(x + z)$

$1996 + z^2 = (z + x)(z + y)$

Do đó : $P = x\sqrt{\dfrac{(x+y)\,(y+z)^2\,(x+z)}{(x+y)(x+z)}} + y\sqrt{\dfrac{(x+y)\,(y+z)\,(x+z)^2}{(x+y)\,(y+z)}} + z$
$\sqrt{\dfrac{(x+z)\,(y+z)\,(x+y)^2}{(x+z)\,(y+z)}}$

$P = x(y + z) + y(x + z) + z(x + y) = 2\,(xy + yz + xz) = 3992$

Bài 5 :

a / Cho a, b, c là số hữu tỉ khác 0 và $a = b + c$

Chứng minh : $\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}$ là số hữu tỉ

b / Cho a, b, c là 3 số hữu tỉ khác nhau đôi một .

Chứng minh : $A = \sqrt{\dfrac{1}{(a-b)^2} + \dfrac{1}{(b-c)^2} + \dfrac{1}{(c-a)^2}}$ là số hữu tỉ

Giải : a / Ta có : $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2+2(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}-\frac{1}{bc})=(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2+2\frac{c+b-a}{abc}=$

$(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2$ (vì $a=c+b$)

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|$$

Do a, b, c là số hữu tỉ khác 0 nên $\left|\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right|$ là số hữu tỉ .

b / Tương tự câu a .

Bài 6 : Rút gọn biểu thức :

$$M=\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$$

Giải :

Điều kiện xác định : $-1<x<1$

Áp dụng công thức căn phức tạp ta tính được

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-1+x^2}}{2}}+\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-1+x^2}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1+|x|}{2}}+\sqrt{\frac{1-|x|}{2}}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) & \text{Neáu } x>0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}) & \text{Neáu } x<0\end{cases}$$

$$(1+x)^3-(1-x)^3=(1+x-1-x)(2+1-x^2)$$

$$\text{Vậy}: M = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1+x^2})}{2+\sqrt{1+x^2}}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}((1+x)-(1-x)) = \sqrt{2}\ x$$

B / GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ :

✦ Một số phép biến đổi tương đương cơ bản :

♦ Định lí 1 : $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ tương đương với hệ

$$\begin{cases} f(x) = g^{2k}(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

♦ Định lí 2 : $\sqrt[2k+1]{f(x)} = f(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$

♦ Định lí 3 : $\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

♦ Định lí 4 : $\sqrt[2k+1]{f(x)} = \sqrt[2k+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

✦ Một số phương pháp giải :

1 / Phương pháp lũy thừa :

VD_1 : Giải phương trình :

$\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}$ (1)

Giải :

$$\begin{cases} 5x-1 > 0 \\ 3x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$$

Khi đó : (1) $\Leftrightarrow \sqrt{5x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{3x-2}$

Hai vế đều không âm nên ta bình phương

$\sqrt{(5x-1)(2x-3)} = 1-2x$

Khi $x > \frac{3}{2}$ thì vế phải của phương trình âm nên phương trình vô nghiệm .

VD_2 : Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

Lập phương hai vế ta được :

$$x+5+3\sqrt[3]{(x+5)^2(x+6)} + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)^2} + x + 6 = 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\ (\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\ ) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+5)(x+6) = 0 \\ x+5 = -x-6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5\ ;\ x = -6 \\ x = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Đáp số : $x = -\ 5 ; x = -6 ; x = -\frac{11}{2}$

2 / Phương pháp đặt ẩn số phụ :

VD_1 : Giải phương trình

$2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$ (✱)

Giải :

Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7} \Rightarrow t > 0$ và $t^2 = 6x^2 - 12x + 7$ khi đó

(✱) $\Leftrightarrow t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = 7 , t = -1$ (loại)

Vậy $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 7 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1 - 2\sqrt{2}$ hoặc $x = 1 + 2\sqrt{2}$

VD_2 : Giải phương trình

$5,(7x-3)^{3} + 8\ 5,(3-7x)^3 = 7$ (✱)

Đặt $t = \sqrt[5]{(7x-3)^3}$

Khi đó : $\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(7x-3)^3}}$

$(\ast) \Leftrightarrow t - \frac{8}{t} = 7 \Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t = 8$

♦ $t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$

♦ $t = 8 \Leftrightarrow x = 5$

Vậy $x = \frac{2}{7}$ và $x = 5$

3 / Phương pháp đưa về phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối :

VD : Giải phương trình

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

Giải :

Điều kiện : $x > 1$

$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = 1$

Nếu $x > 2$ thì $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} - 1 = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (không thuộc khoảng đang xét)

Nếu $1 < x < 2$ thì $\sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2$

Vô số nghiệm : $1 < x < 2$

Kết luận : $1 < x < 2$ vô số nghiệm

4 / Phương pháp bất đẳng thức :

a / Chứng tỏ tập giá trị của 2 vế là khác nhau khi đó phương trình vô nghiệm :

VD : Giải phương trình

$\sqrt{x-1} - \sqrt{5x-1} = \sqrt{2x-1}$ $(\ast)$

Giải :

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 5x-1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{1}{5} \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>1$$

Với điều kiện này ta có : $1<5$ nên $1<5x$.

Do đó : $\sqrt{x-1} < \sqrt{5x-1}$

Nên vế trái của (✸) là số âm , lại có : $2>1$ nên $2x>1$.

Do đó : $2x-1>0$ nên vế phải của (✸) là số không âm . Vậy phương trình vô nghiệm

b / Sử dụng tính đối nghịch ở hai vế :

VD : Giải phương trình

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2-6x+11$$

Giải :

Điều kiện : $\begin{cases} x-2>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<4 \end{cases}$

Ta luôn có : $x^2-6x+11=(x-3)^2+2>2$

Áp dụng bất đẳng thức : $\dfrac{A^2+B^2}{2} > \dfrac{(A+B)^2}{2}$

Vào vế trái ta được : $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}<2$ (dấu "=" xảy ra khi $x-2 = 4-x \Leftrightarrow x=3$

Vậy 2 vế đều bằng nhau và bằng 2 khi $x=3$, nên $x=3$ là nghiệm của phương trình

c / Sử dụng điều kiện xảy ra dấu "=" ở bất đẳng thức .

VD : Giải phương trình

$$\frac{x}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{x}=2$$

Giải :

Điều kiện : $x+2>0 \Leftrightarrow x>2$ (✸)

Ta có bất đẳng thức :

a,b + b,a > 2 với a, b > 0 (dấu "=" xảy ra khi a = b

Do đó phương trình tương đương : $\sqrt{x+2}=x$

Điều kiện : $x > 0$ (✱✱) bình phương hai vế ta có :

$$x+2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện (✱) và (✱✱) phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 2$

BÀI TẬP : Giải phương trình

1 . $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$

2 . $\sqrt{3x^2+6x+7} + \sqrt{5x^2+10x+14} = 4 - 2x - x^2$

3 . $\dfrac{x}{\sqrt{4x-1}} + \dfrac{\sqrt{4x-1}}{x} = 2$

4 . $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 4 - 2x$

5 . $\sqrt{x+2-4\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} = 1$

6 . $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x-1^2}) + \sqrt[3]{x^2-1} = 1$

C / VẬN DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI TÌM CỰC TRỊ :

Chúng ta đã biết với $a > 0$, $b > 0$ thì $a + b > 2\sqrt{ab}$ (1) (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b) (BĐT Côsi)

♦ Bất đẳng thức Côsi mở rộng đối với n số không âm :

Với $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ thì $a_1, + a_2 + \ldots + a_n > n\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

Với 2 số dương a, b từ bất đẳng thức (1) suy ra :

♦ Nếu $ab = k$ (không đổi) thì Min $(a + b) = 2\sqrt{k}$ (khi và chỉ khi a = b)

♦ Nếu $a + b = k$ (không đổi) thì Max $(ab) = \dfrac{k^2}{4}$ (khi và chỉ khi a = b)

Kết quả trên được mở rộng đối với n số không âm

♦ Nếu $a_1.a_2 \ldots a_n = k$ (không đổi) thì Min $(a_1, + a_2 + \ldots + a_n) = n\sqrt[n]{k}$ (khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

♦ Nếu $a_1, + a_2 + \ldots + a_n = k$ (không đổi) thì Max $(a_1.a_2 \ldots a_n) = (\dfrac{k}{n})n$

(khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$)

Vận dụng bất đẳng thức Côsi có thể tìm được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 1 biểu thức .

♦ Biện pháp 1 : Để tìm cực trị của biểu thức ta tìm cực trị của bình phương biểu thức đó .

VD : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$A = \sqrt{3x-5} + \sqrt{7-3x}$

Giải : Điều kiện xác định : $\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$

$A^2 = (3x-5) + (7-3x) + 2\sqrt{(3x-5)(7-3x)}$

$A^2 < 2 + (3x-5+7-3x) = 4$ (dấu "=" xảy ra khi $3x-5 = 7-3x \Leftrightarrow x = 2$)

Vậy $A^2 = 4 \Rightarrow$ Max A = 2 (khi và chỉ khi x = 2)

♦ Biện pháp 2 : Nhân và chia biểu thức với cùng biểu thức khác 0 .

VD : Tìm giá trị lớn nhất $A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x}$

Giải :

Điều kiện xác định : $x > 9$

$$A = \frac{\sqrt{x-9}}{5x} = \frac{\sqrt{\frac{(x-9).3}{3}}}{5x} < \frac{1}{2}\,\frac{(\frac{x-9}{3}+3)}{5x} = \frac{\frac{x-9+9}{3}}{10x} = \frac{1}{30}$$

(daáu "=" xaûy ra $\Leftrightarrow \frac{x-9}{3} = 3 \Leftrightarrow x = 18$)

Vậy Max A = 1,3 (khi và chỉ khi x = 18)

♦ Biện pháp 3 : Biến đổi biểu thức đã cho thành 1 tổng của các biểu thức sao cho tích của chúng là một hằng số .

1 . Tách 1 hạng tử thành tổng nhiều hạng tử bằng nhau :

VD : Cho x > 0 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \frac{3x^4+16}{x^3}$

Giải :

$$A = 3x + \frac{16}{x^3} = x + x + x + \frac{16}{x^3} > 4\sqrt[4]{x.x.x.\frac{16}{x^3}}$$

$A > 4 . 2 = 8$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{16}{x^3} \Leftrightarrow x = 2$)

Vậy Min $A = 8$ (khi và chỉ khi $x = 2$)

2 . Tách 1 hạng tử chứa biến thành tổng của 1 hằng số với 1 hạng tử chứa biến sao cho hạng tử này là nghịch đảo của 1 hạng tử khác có trong biểu thức đã cho . Có thể sai khác 1 hằng số .

VD : Cho $0 < x < 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2}{x}$

Giải :

$$A = \frac{9x}{2-x} + \frac{2-x}{x} + 1$$

$$A > 2\sqrt{\frac{9x}{2-x}\,\frac{2-x}{x}} + 1 = 7$$

(dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{9x}{2-x} = \frac{2-x}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$)

Vậy Min A = 7 (khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$)

♦ Biện pháp 4 : Thêm một hạng tử vào biểu thức đã cho .

VD : Cho 3 số dương x, y, z thoả điều kiện : $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Giải : Vận dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương : $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$. Ta được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} > 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}} = x$$

Tương tự : $\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z+x}{4} > y$

$\dfrac{z^2}{x+y}+\dfrac{x+y}{4} > z$

Vậy : $\left(\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}\right)+\dfrac{x+y+z}{2} > x+y+z$

$P > x+y+z-\dfrac{x+y+z}{2}=1$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{2}{3}$)

Vậy Min P =1 (khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$)

BÀI TẬP :

1 . Cho x, y, z là các số dương thỏa điều kiện : $x+y+z > 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}$$

Giải :

$$P^2=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+2\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+2\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 4 số dương ta được :

$$\frac{x^2}{y}+\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+z > 4\sqrt[4]{\frac{x^2.x^2.y.z}{y.z}}=4x$$

$$\frac{y^2}{z}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+x > 4\sqrt[4]{\frac{y^2.y^2.z.x}{z.x}}=4y$$

$$\frac{z^2}{x}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+y > 4\sqrt[4]{\frac{z^2.z^2.x.y}{x.y}}=4z$$

Do đó : $P^2 > 4(x+y+z)-(x+y+z)=3(x+y+z)$

$P^2 > 3.12=36$ (dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=4$)

Vậy : Min P = 6 (khi và chỉ khi $x=y=z=4$)

2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$A = (1 + \frac{a}{x})(1 + \frac{a}{y})(1 + \frac{a}{z})$ Cho

Với x, y, z là các số dương thỏa điều kiện : $x + y + z = a$

3 . Cho a, b, c là các số dương thỏa điều kiện : $a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$E = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

BÀI TẬP :

Dạng 1 : CĂN BẬC HAI – CĂN THỨC BẬC HAI

Bài 1 : Rút gọn biểu thức : $a / A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$

$b / B = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}}{\sqrt{2}}$

Với : $i / x > 4$

$ii / 2 < x < 4$

Giải :

a / Ta có : $A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}+1}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

b / $B = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2x-4\sqrt{2x-4}}{4}} = \frac{\sqrt{2x-4-4\sqrt{2x-4}+4}}{2} = \frac{\left|\sqrt{2x-4}-2\right|}{2}$

i / Với $x > 4$ thì $2x - 4 > 2$. Khi đó $B = \frac{\sqrt{2x-4}-2}{2}$

ii / Với $2 < x < 4$ thì $\sqrt{2x-4} < 2$. Khi đó $B = \frac{2-\sqrt{2x-4}}{2}$

Bài 2 : Rút gọn biểu thức :

$a/\ A=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$ Với $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$

$b/\ B=(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\frac{2\sqrt{xy}}{x-y})$ $x, y>0$ và $x\neq y$

Giải :

a / Cách 1 :

Tính $\sqrt{2}\ A=\sqrt{4x+2\sqrt{4x-1}}+\sqrt{4x-2\sqrt{4x-1}}$

$=\sqrt{4x-1+2\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{4x-1-2\sqrt{4x-1}+1}$

$=\sqrt{(\sqrt{4x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{4x-1}-1)^2}$

$=\left|\sqrt{4x-1}+1\right|+\left|\sqrt{4x-1}-1\right|$

$=\sqrt{4x-1}+1+1-\sqrt{4x-1}=2$

$\Rightarrow A=\sqrt{2}$

Cách 2 : Tính A^2

$A^2=2x+\sqrt{4x-1}+2\sqrt{(2x+\sqrt{4x-1})(2x-\sqrt{4x-1})}+2x-\sqrt{4x-1}$

$=4x+2\sqrt{4x^2-4x+1}=4x+2\sqrt{(2x-1)^2}=4x+2\left|2x-1\right|=4x=2(1-2x)$

$=2$ (vì $2x-1<0$)

Vì $A>0$ nên $A=\sqrt{2}$

b / Ta có :

$C=(\sqrt{x}-\frac{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}})(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})+\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2\sqrt{xy}}{x-y})$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y})=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

Bài 3 : Tính tổng :

$A=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1994}+\sqrt{1995}}$

Từ đó suy ra rằng :

$$B=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1994}}>86$$

Giải :

Nhân các lượng liên hợp để khử căn ở mẫu ta được :

$$A=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{1994}-\sqrt{1993}}{1994-1993}+\frac{\sqrt{1995}-\sqrt{1994}}{1995-1994}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ldots+(\sqrt{1995}-\sqrt{1994})=\sqrt{1995}-1$$

Suy ra :

$$B=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2}{\sqrt{1994}+\sqrt{1994}}>\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$+\ldots+\frac{2}{\sqrt{1994}+\sqrt{1995}}=2A$$

$$\Rightarrow B>2(\sqrt{1995}-1)>2(44-1)=86$$

Bài tập tự giải : Rút gọn biểu thức

Bài 1 : Rút gọn biểu thức

$$a/\ A=\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$$

$$b/\ B=\left(\frac{\sqrt{x}}{x-4}+\frac{2}{2-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\left(\sqrt{x}-2+\frac{10-x}{\sqrt{x}+2}\right)$$

Kết quả :

$A=\sqrt{x^2-4x}$ $\qquad$ $(x<0$ hoặc $x>4)$

$B=\dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$ $\qquad$ $(0<x\neq 4)$

Bài 2 : Cho $M=\dfrac{x^2-x}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{x^2+x}{x-\sqrt{x}+1}$. Hãy rút gọn $A=1-\sqrt{M+x+1}$ $\quad$ $(0<x<1)$

Hướng dẫn :

Chú ý : $x^2-\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x^3}-1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)$

$x^2+\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+1)=\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

$\Rightarrow A=\sqrt{x}\ =\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

Dạng 2 : CĂN BẬC BA – CĂN BẬC N

Bài 1 : Chứng minh rằng nếu :

$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$ (1)

Thì : $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

Giải :

Đặt $\sqrt[3]{x^2}=b$ và $\sqrt[3]{y^2}=c$ $\quad$ $(b, c > 0)$

Khi đó : $x^2 = b^3$ và $y^2 = c^3$

Thay vào (1) ta được :

$\sqrt{b^3+\sqrt[3]{b^6c^3}}+\sqrt{c^3+\sqrt[3]{b^3c^6}}=a$

$\Leftrightarrow \sqrt{b^3+b^2c}+\sqrt{c^3+bc^2}=a$

$\Leftrightarrow b\sqrt{(b+c)}+c\sqrt{(c+b)}=a \Leftrightarrow (b+c)\sqrt{(b+c)}=a \Leftrightarrow \sqrt{(b+c)^3}=a \Leftrightarrow b+c=$

$\sqrt[3]{a^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ (đpcm)

Bài 2 : Chứng minh rằng nếu

$ax^3=by^3=cz^3$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ thì $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$

Giải :

Đặt $ax^3=by^3=cz^3=t$ (✷)

Khi đó $\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{t(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}=\sqrt[3]{t}$ (1)

Từ (✷) suy ra : $x\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{t}$; $\quad y\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{t}$; $z\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{t}$

Do đó : $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = \frac{\sqrt[3]{t}}{x} + \frac{\sqrt[3]{t}}{y} + \frac{\sqrt[3]{t}}{z} = \sqrt[3]{t}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{t}$ (2)

So sánh (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh

Bài 3 : Tính giá trị biểu thức :

1 . $\frac{1}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}}$ 2 . $A = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

Giải :1 . Ta có : $\frac{1}{\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{9}} = \frac{1}{(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{3} + (\sqrt[3]{3})^2}$

$= \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} . \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})} = \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}}{2-3} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$

2 . Áp dụng công thức $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

Ta có : $A^3 = (\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3 = 2+\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} + 2-\sqrt{5} =$
$4 - 3A$

$\Rightarrow A^3 + 3A - 4 = 0 \Leftrightarrow A^3 - 1 + 3A - 3 = 0 \Leftrightarrow (A-1)(A^2 + A + 1) + 3(A-1) = 0 \Leftrightarrow$
$(A-1)(A^2 + A + 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A - 1 = 0 \\ A^2 + A + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow A = 1$ (vì $A^2 + A + 4 \neq 0$) Vậy : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} +$
$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

Bài tập tự giải :

Bài 1 : Cho $x = \frac{2}{2\sqrt[3]{2} + 2 + \sqrt[3]{4}}$; $y = \frac{6}{2\sqrt[3]{2} - 2 + \sqrt[3]{4}}$ Tính $A = xy^3 - x^3y$

Bài 2 : Tính : $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}\,(2-3) + \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$